АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том II 1956 Вып. 2

К ВОПРОСУ О ВОЛНОВОДНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ю. Л. Газарян

Найдено и исследовано поле точечного сферического излучателя, помещенного в слоисто-неоднородную среду, скорость звука в которой изменяется по закону, указанному Эпштейном.

В настоящее время имеется стандартная математическая процедура вычисления поля точечного сферического гармонического излучателя, помещенного в слоисто-неоднородную среду, приводящая к интегральному представлению поля. С физической точки зрения процесс решения можно представить как разложение поля точечного источника в свободном пространстве на плоские волны (однородные и неоднородные), получение для рассматриваемой среды некоторого аналога этих плоских волн и последующее интегрирование по полученным функциям.

Таким образом, для каждого конкретного случая зависимости скорости звука (плотность среды предполагается постоянной) нахождение интегрального представления поля сводится к нахождению решений, аналогичных плоским волнам в однородном пространстве. Эти аналоги плоских волн получаются решением волнового уравнения, записанного в прямоугольной системе координат, одна из осей которой направлена перпендикулярно слоям среды, методом разделения переменных. Характер таких решений определяется выбранной зависимостью скорости звука. В часто рассматриваемом случае среды, состоящей из нескольких однородных слоев, решения сводятся к комбинации падающих и отраженных плоских волн; в случае же непрерывного изменения свойств среды решения усложняются. Следует отметить, однако, что это усложнение только кажущееся. Дело в том, что с математической точки зрения решение будет тем проще, чем более гладкой функцией задается зависимость скорости звука. С этой точки зрения решение в случае нескольких однородных слоев, т. е. когда зависимость скорости звука дается не только не гладкой, но даже разрывной функцией, гораздо сложнее, чем при задании зависимости скорости звука некоторой аналитической функцией. Такая точка зрения может быть проиллюстрирована на вопросе о волноводном распространении звука в слоисто-неоднородной среде. Задача в этом случае сводится к нахождению полюсов подинтегрального выражения в интегральном представлении и к исследованию их зависимости от частоты. Для подтверждения сказанного выше достаточно указать, что в простейшем случае однородного слоя, лежащего на однородном полупространстве, вычисление полюсов приводит к трансцедентному уравнению, которое в случае не очень больших частот может быть решено только численно. В то же время, как будет показано ниже, в случае задания скорости звука аналитической функцией, аппроксимирующей однородный слой, лежащий между двумя однородными полупространствами, полюсы выражаются через частоту весьма просто.

Используемый ниже закон зависимости скорости распространения волны был предложен для электромагнитного случая Эпштейном [1], показавшим, что решения, аналогичные плоским волнам, выражаются при этом законе через элементарные и гипергеометрические функции.

Предполагая в акустическом случае плотность среды постоянной, и считая ось z направленной вертикально вверх, зависимость скорости звука $c(z)$ от высоты удобно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{c^2(z)} = \frac{A}{\operatorname{ch}^2 \frac{z}{H}} + B \operatorname{th} \frac{z}{H} + C.$$

Здесь

$$A = \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_\infty^2} + \frac{1}{c_{-\infty}^2}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_\infty^2} - \frac{1}{c_{-\infty}^2}\right), \quad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_\infty^2} + \frac{1}{c_{-\infty}^2}\right),$$

где $c_\infty = c(+\infty)$, $c_{-\infty} = c(-\infty)$, $c_0 = c(0)$. Параметр H характеризует толщину промежуточного слоя. Если $A > \left|\frac{B}{2}\right|$, что мы будем считать выполненным, то имеется звуковой канал, ось которого расположена на высоте

$$z = H \operatorname{arth} \frac{B}{2A}.$$

Отметим, что вся задача значительно упрощается, когда скорости в верхнем и нижнем полупространствах на бесконечности равны. При этом $B = 0$ и $c(z)$ является четной функцией от z (симметричный слой Эпштейна). Если зависимость от времени дается множителем $\exp\{-i\omega t\}$, который в дальнейшем будем отбрасывать, то потенциал скоростей φ точечного сферического излучателя, помещенного в точке $(0, z_0)$ цилиндрической системы координат (r, z) дается при $z \geqslant z_0$ формулой

$$\varphi(r, z) = \frac{H}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\zeta)\, \Phi_2(\zeta_0)\, \Gamma\left(\nu + \frac{\lambda+\mu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \nu + \frac{\lambda+\mu}{2}\right) H_0^{(1)}(\xi r)\, \xi d\xi.$$

Здесь $\nu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A\omega^2 H^2}$ (корень берется арифметический) $\zeta = z/H$, $\zeta_0 = z_0/H$, $\mu^2 = H^2(\xi^2 - k_\infty^2)$, $\lambda^2 = H^2(\xi^2 - k_{-\infty}^2)$, где $k_\infty = \omega/c_\infty$, $k_{-\infty} = \omega/c_{-\infty}$,

$$\Phi_1(\zeta) = e^{-\mu\zeta} \frac{(1+e^{-2\zeta})^\nu}{\Gamma(1+\mu)} F\left(\nu + \frac{\mu+\lambda}{2},\ \nu + \frac{\mu-\lambda}{2};\ 1+\mu;\ -e^{-2\zeta}\right)$$

(при $\zeta < 0$ следует пользоваться аналитическим продолжением гипергеометрического ряда). $\Phi_2(\zeta_0)$ получится из $\Phi_1(\zeta)$ заменой (λ, μ, ζ) на $(\mu, \lambda, -\zeta_0)$. В интеграле подразумевается обход особых точек, лежащих на действительной оси, причем на пути интеграции $\operatorname{Re}\mu$, $\lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu$, $\lambda \leqslant 0$. Поле при $z < z_0$ получится заменой ζ на ζ_0, и наоборот. В случае симметричного слоя $\lambda = \mu$ и Φ_1 сводится к сферической функции:

$$\Phi_1(\zeta) = P_{\nu-1}^{-\mu}(\operatorname{th}\zeta).$$

При исследовании поля вблизи оси канала на достаточно больших расстояниях от излучателя, контур интеграции можно деформировать в комплексной плоскости ξ вверх. При этом функция $\varphi(r, z)$ сводится к двум боковым волнам и сумме нормальных волн; первые определяются контурными интегралами по двум вертикальным петлям, охватывающим точки разветвления, последние — вычетами в полюсах подинтегральной функции, которые задеваются при деформации контура. Амплитуда боковых волн убывает как $1/r^2$, нормальные же волны убывают как $1/\sqrt{r}$, так что дело сводится к исследованию одних нормальных волн. Оказывается, что единственными полюсами, которые могут задеваться при

деформировании контура, являются нули $\dfrac{1}{\Gamma\left(1-\nu+\dfrac{\lambda+\mu}{2}\right)}$.

Таким образом, s-й полюс определяется соотношением

$$\lambda+\mu=2(\nu-1-s),$$

где $s=0, 1, 2, \ldots$ Контур интеграции можно считать проходящим по верхнему листу четырехлистной римановой поверхности. При низких частотах все полюсы лежат на нижних листах на действительной оси. С возрастанием частоты они перемещаются по действительной оси, приближаясь к точкам разветвления, наиболее удаленным от начала координат. При некоторой критической частоте ω_0 нулевой полюс попадает в точку разветвления и, переходя на верхний лист, удаляется с повышением частоты по действительной оси от начала координат. Так как после попадания на верхний лист лежащий в правой полуплоскости полюс задевается при деформации пути, то переход через критическую частоту означает появление нормальной волны. Точно так же ведут себя с повышением частоты остальные полюсы.

Для s-й нормальной волны критическая частота определяется из уравнения

$$H\omega_s\sqrt{2B}+1+2s-\sqrt{1+4AH^2\omega_s^2}=0$$

(здесь для определенности считается $B\geqslant 0$), причем для нулевой нормальной волны в случае $B\neq 0$ надо брать отличный от нуля корень. При $B=0$ $\omega_0=0$, т. е. нулевая нормальная волна имеется на всех частотах.

Значение s-го полюса дается выражением

$$\xi_s=\sqrt{k_{-\infty}^2+\left[\frac{\Delta}{2H}+\frac{H}{2\Delta}\left(k_\infty^2-k_{-\infty}^2\right)\right]^2},\quad \text{где } \Delta=2(\nu-1-s).$$

Потенциал скоростей s-й нормальной волны дается выражением

$$(H\varphi)_s=i(-1)^s\frac{\pi}{\Gamma(1+s)}\frac{\Gamma(2\nu-1-s)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\exp\left\{\frac{\mu-\lambda}{2}(\zeta+\zeta_0)\right\}\times$$
$$\times\frac{G_s\left(2\nu-1-2s,\ 1+\mu,\ \dfrac{1-\operatorname{th}\zeta}{2}\right)}{(2\operatorname{ch}\zeta)^{\nu-1-s}}\frac{G_s\left(2\nu-1-2s,\ 1+\lambda,\ \dfrac{1+\operatorname{th}\zeta_0}{2}\right)}{(2\operatorname{ch}\zeta_0)^{\nu-1-s}}H_0^{(1)}(r\xi_s).\qquad(1)$$

Здесь G_s — полином Якоби s-го порядка. Можно доказать, что (1) симметрично относительно ζ, ζ_0.

Решение значительно упрощается в случае симметричного слоя. При этом нормальные волны четного порядка оказываются четными функциями от z, а нечетного — нечетными. Для четных нормальных волн (1) можно записать в виде

$$(H\varphi)_{2\sigma}=i(\nu-1-2\sigma)\frac{\Gamma\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\sigma+1)}\frac{\Gamma\left(\nu-\sigma-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\sigma)}\times$$
$$\times\frac{G_\sigma\left(\nu-2\sigma-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \operatorname{th}^2\zeta\right)}{\operatorname{ch}^{\nu-1-2\sigma}\zeta}\frac{G_\sigma\left(\nu-2\sigma-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \operatorname{th}^2\zeta_0\right)}{\operatorname{ch}^{\nu-1-2\sigma}\zeta_0}\times$$
$$\times H_0^{(1)}\left\{\frac{r}{H}\sqrt{H^2k_\infty^2+(\nu-1-2\sigma)^2}\right\}$$
$$(\sigma=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Для нечетных волн:

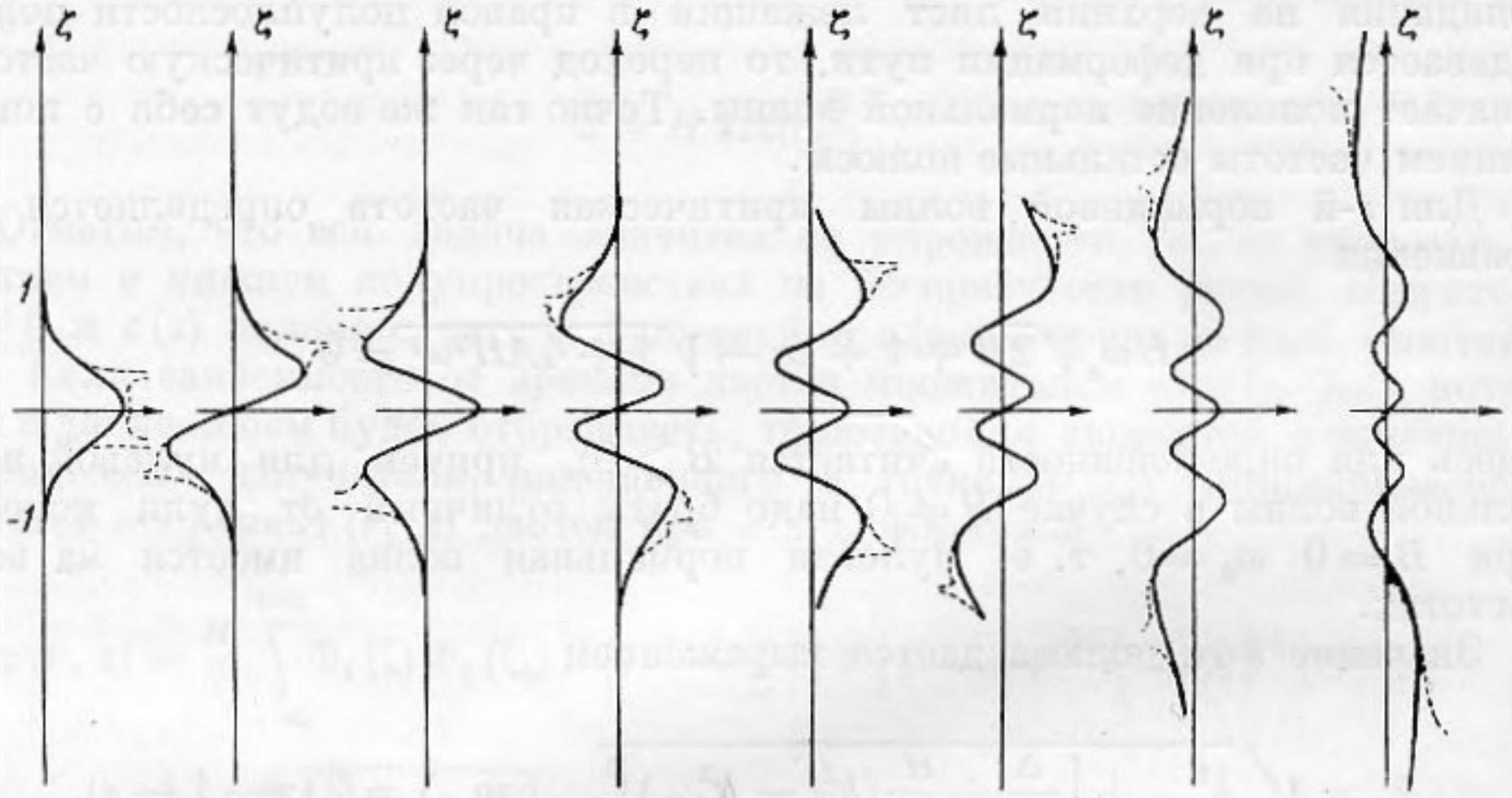
$$(H\varphi)_{2\sigma+1} = i4\,(\nu-2-2\sigma)\,\frac{\Gamma\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\sigma+1)}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\sigma-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\sigma-1)}\,\mathrm{th}\,\zeta\,\mathrm{th}\,\zeta_0\times$$

$$\times\frac{G_\sigma\left(\nu-2\sigma-\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,,\,\mathrm{th}^2\zeta\right)}{\mathrm{ch}^{\nu-2-2\sigma}\zeta}\,\frac{G_\sigma\left(\nu-2\sigma-\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\,,\,\mathrm{th}^2\zeta_0\right)}{\mathrm{ch}^{\nu-2-2\sigma}\zeta_0}\times$$

$$\times H_0^{(1)}\left\{\frac{r}{H}\sqrt{H^2k_\infty^2+(\nu-2-2\sigma)^2}\right\}.$$

$$(\sigma=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Заметим, что в случае симметричного слоя легко получается решение, когда на оси канала имеется абсолютно отражающая граница: достаточно ввести мнимый излучатель в фазе или в противофазе с действительным.



При этом поле сведется либо к удвоенным четным, либо к удвоенным нечетным нормальным волнам.

Приведем в заключение график множителей, дающих распределение амплитуды нормальных волн по высоте для случая симметричного слоя (см. фигуру). По оси ординат отложена безразмерная высота ζ. Безразмерная величина ν, характеризующая остальные параметры, принята равной 8,5 (случай, когда имеется 8 нормальных волн и частота лежит приблизительно посредине между восьмой и девятой критическими частотами). На графике также нанесены пунктиром значения, полученные по ВКБ-методу.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. S. Epstein. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 1930, **16**, 10, 627—637.

Акустический Институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
21 февраля 1956 г.