АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том II 1956 Вып. 2

ПРИМЕНЕНИЕ СЛОЕВ, УСТРАНЯЮЩИХ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА

М. А. Исакович

Поставлена и решена задача о подавлении поперечных волн, возникающих при отражении звука в твердых телах, при помощи твердого слоя, наносимого на поверхность твердого тела.

1. Как известно, при отражении продольной звуковой волны от границы твердого тела возникает также и поперечная отраженная волна, амплитуда которой определяется механическими параметрами материала и углом падения волны. Возникновение двух отраженных волн (вместо одной, как это имеет место в жидкости) связано с характером условий на свободной границе твердого тела, где требуется обращение в нуль как нормальной, так и касательной составляющей напряжения.

В ряде случаев (например, в звуковой оптике) появление дополнительной отраженной волны может оказаться нежелательным. В связи с этим в настоящей заметке указывается способ устранения поперечных волн, возникающих при отражении продольной волны от границы твердого тела. Способ заключается в нанесении на границу твердого тела твердого слоя определенной толщины, изготовленного из другого материала и жестко соединенного (например, пайкой) с исходным телом. При выполнении некоторого условия, налагаемого на параметры материалов и угол падения (оно будет сформулировано ниже), можно подобрать такую толщину слоя, чтобы поперечная волна не возникала и продольная волна нацело отразилась в виде продольной же волны; при этом в слое будут возбуждены как продольные, так и поперечные стоячие волны.

Здесь можно указать на некоторую аналогию с просветляющими слоями в акустике и в оптике; однако, в отличие от известных случаев, здесь мешающим отражением, подлежащим устранению, является волна другого типа, чем падающая.

2. Применяя обычную методику расчета акустических длинных линий, выведем условие отсутствия отраженной поперечной волны для какой-нибудь заданной частоты ω. Это условие будет связывать параметры материалов тела и слоя и угол падения продольной волны с искомой толщиной слоя*.

Пусть плоская продольная волна падает под углом скольжения χ на границу $z=0$ твердого тела, за которой расположен твердый слой толщины h из другого вещества, жестко соединенный с телом по всей плоскости соприкосновения. Обозначим плотности материала и скорости распространения продольных и поперечных волн в теле и в слое соответственно через ρ, c_l, c_t и ρ', c_l', c_t'. В дальнейшем также будем отличать штрихом величины, относящиеся к слою, от величин, относящихся к телу или равно относящихся и к телу и к слою.

Введем скалярный и векторный потенциалы смещений φ и $\vec{\psi}$. Если плоскость падения волны принять за плоскость xz, то, ввиду симметрии усло-

* Во всем расчете будем пренебрегать поглощением звуковых волн.

вий, в векторном потенциале будет отлична от нуля только компонента по оси y. Уравнения движения можно, таким образом, записать в следующем виде:

$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0; \quad \Delta\psi + k_t^2\psi = 0. \tag{1}$$

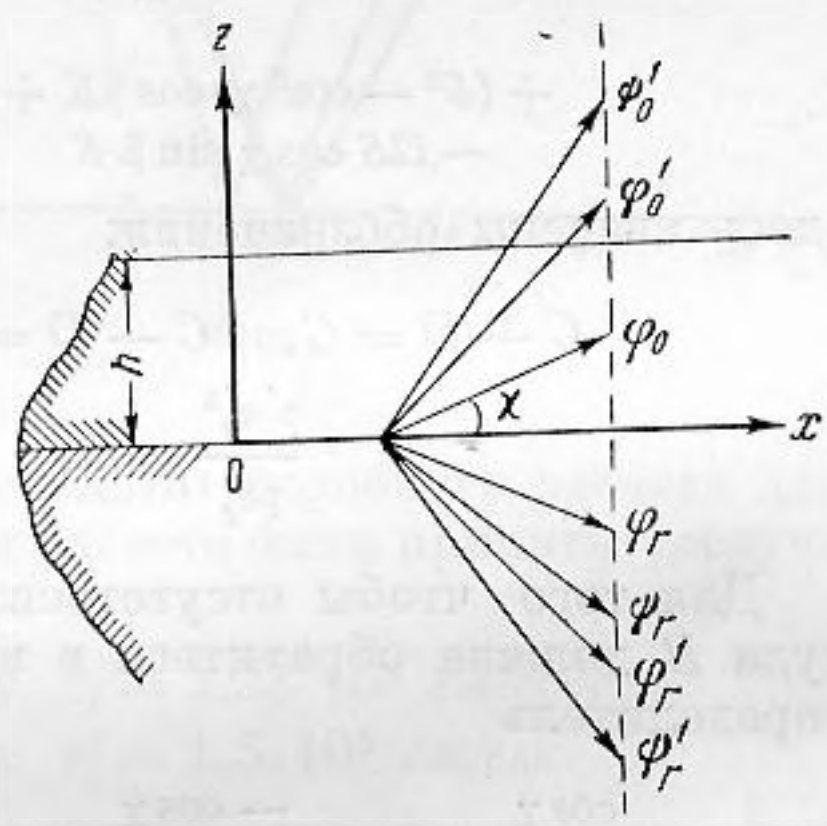
Здесь $k_l = \omega / c_l$ и $k_t = \omega / c_t$ — волновые числа продольной и поперечной волны соответственно. Смещения частиц (происходящие параллельно плоскости xz) выразятся формулами:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Напряжения в среде запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \rho c_t^2 \left[-k_t^2\psi + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right], \\ \sigma_{zz} &= \rho c_t^2 \left[-k_t^2\varphi + 2\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

В общем случае у границы твердого тела со слоем возникнут шесть отраженных и преломленных волн (три продольные и три поперечные), след которых будет бежать по границе с той же скоростью, что и след падающей волны. На фиг. 1 показаны волновые векторы всех этих волн, отложенные от одной точки границы твердого тела. Их проекции на ось x равны между собой и равны проекции $k_l \cos\chi$ волнового вектора падающей волны φ_0. Введем обозначения потенциалов отдельных плоских волн согласно чертежу. Здесь ψ_r — это та поперечная отраженная волна, которую желательно подавить.



Фиг. 1

Потенциалы в твердом теле и в слое будут равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_r, \quad & \psi &= \psi_r, \\ \varphi' &= \varphi_0' + \varphi_r', \quad & \psi' &= \psi_0' + \psi_r'. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если принять амплитуду падающей волны за единицу, то потенциалы отдельных волн можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \exp\left[ik_l(x\cos\chi + z\sin\chi)\right], \\ \varphi_r &= A\exp\left[ik_l(x\cos\chi - z\sin\chi)\right], \\ \psi_r &= B\exp\left[ik_l(x\cos\chi - zT)\right], \\ \varphi_0' &= C\exp\left[ik_l(x\cos\chi + zN)\right], \\ \varphi_r' &= D\exp\left[ik_l(x\cos\chi - zN)\right], \\ \psi_0' &= E\exp\left[ik_l(x\cos\chi + zS)\right], \\ \psi_r' &= F\exp\left[ik_l(x\cos\chi - zS)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения:

$$T=\sqrt{\frac{c_l^2}{c_t^2}-\cos^2\chi},\quad N=\sqrt{\frac{c_l^2}{c_l'^2}-\cos^2\chi},\quad S=\sqrt{\frac{c_l^2}{c_t'^2}-\cos^2\chi}.$$

На поверхности соприкосновения тела и слоя должны выполняться граничные условия равенства нормальных и касательных скоростей и нормальных и касательных напряжений в теле и в слое:

$$u_x=u_x',\quad u_z=u_z';\quad \sigma_{xz}=\sigma_{xz}',\quad \sigma_{zz}=\sigma_{zz}' \text{ при } z=0. \tag{6}$$

На свободной границе слоя должны выполняться граничные условия равенства нулю нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{xz}'=0,\quad \sigma_{zz}'=0 \text{ при } z=h. \tag{7}$$

Согласно (2), (3), (5) можно записать (6) и (7) в следующем виде:

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\chi\, A+TB-\cos\chi\, G+SL=-\cos\chi,\\
-\sin\chi\, A+\cos\chi\, B-NH=-\sin\chi,\\
2\sin\chi\cos\chi\, A+(T^2-\cos^2\chi)\,B+2mN\cos\chi H=2\sin\chi\cos\chi,\\
-(T^2-\cos^2\chi)\,A+2T\cos\chi\, B+m(S^2-\cos^2\chi)\,G-\cos\chi K+2mS\cos\chi L=T^2-\cos^2\chi,\\
-i2N\cos\chi\sin\alpha G-2N\cos\chi\cos\alpha H-m(S^2-\cos^2\chi)\,K+(S^2-\cos^2\chi)\cos\beta K+i(S^2-\cos^2\chi)\sin\beta L=0,\\
-(S^2-\cos^2\chi)\cos\alpha G-i(S^2-\cos^2\chi)\sin\alpha H-i2S\cos\chi\sin\beta K-2S\cos\chi\cos\beta L=0.
\end{array}\right. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения:

$$C+D=G,\quad C-D=H,\quad E+F=K,\quad E-F=L,$$

$$\frac{\rho' c_t'^2}{\rho c_t^2}=m,\quad k_l Nh=\alpha,\quad k_l Sh=\beta.$$

Для того чтобы отсутствовала отраженная поперечная волна, амплитуда B должна обратиться в нуль. Для этого должен быть равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix}
\cos\chi & -\cos\chi & -\cos\chi & 0 & 0 & S\\
-\sin\chi & -\sin\chi & 0 & N & -\cos\chi & 0\\
2\sin\chi\cos\chi & 2\sin\chi\cos\chi & 0 & 2mN\cos\chi & -m(S^2-\cos^2\chi) & 0\\
-(T^2-\cos^2\chi) & T^2-\cos^2\chi & m(S^2-\cos^2\chi) & 0 & 0 & 2mS\cos\chi\\
0 & 0 & -i2N\cos\chi\sin\alpha & -2N\cos\chi\cos\alpha & (S^2-\cos^2\chi)\cos\beta & i(S^2-\cos^2\chi)\sin\beta\\
0 & 0 & -(S^2-\cos^2\chi)\cos\alpha & -i(S^2-\cos^2\chi)\sin\alpha & -i2S\cos\chi\sin\beta & -2S\cos\chi\cos\beta
\end{vmatrix}. \tag{9}$$

Раскрывая определитель и производя упрощения, придем окончательно к следующему условию отсутствия отраженной поперечной волны:

$$U+V\sin\alpha\sin\beta+W\cos\alpha\cos\beta=0. \tag{10}$$

Здесь

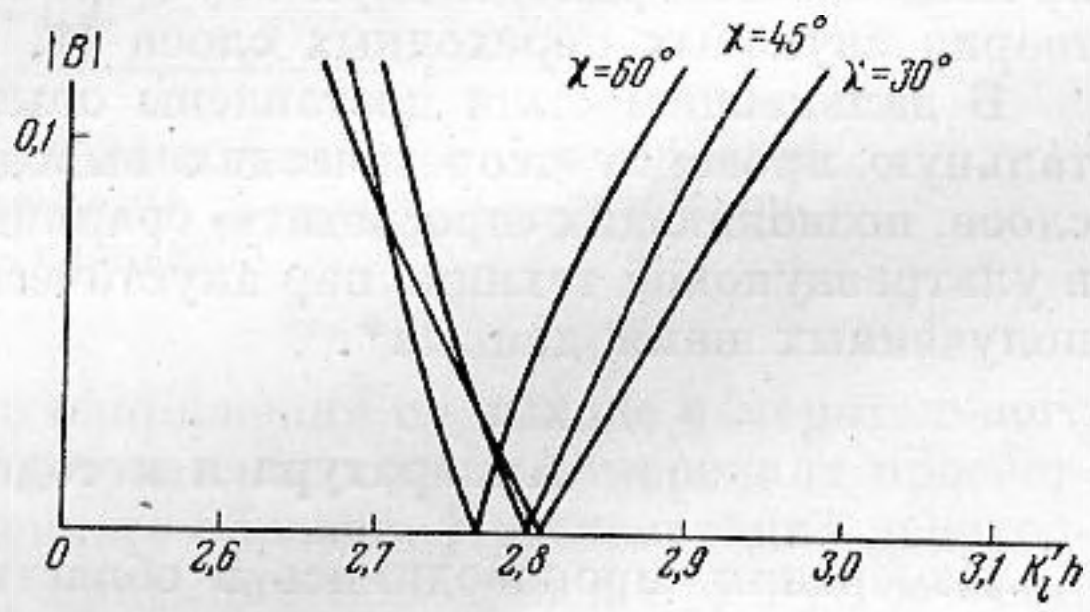
$$U = 2NS(S^2 - \cos^2\chi)\{2\cos^2\chi(m-1)[mS^2 - T^2 - (m-1)\cos^2\chi] + \\ + (T^2 - \cos^2\chi + 2m\cos^2\chi)[m(S^2 - \cos^2\chi) + 2\cos^2\chi]\},$$

$$V = (S^2 - \cos^2\chi)^2[mS^2 - T^2 - (m-1)\cos^2\chi][m(S^2 - \cos^2\chi) + 2\cos^2\chi] + \\ + 8N^2S^2\cos^2\chi(m-1)(T^2 - \cos^2\chi + 2m\cos^2\chi),$$

$$W = -2NS\{2\cos^2\chi[mS^2 - T^2 - (m-1)\cos^2\chi][m(S^2 - \cos^2\chi) + 2\cos^2\chi] + \\ + (S^2 - \cos^2\chi)^2(m-1)(T^2 - \cos^2\chi + 2m\cos^2\chi)\}.$$

Формулу (10) можно рассматривать как уравнение для нахождения h при заданных частоте, угле скольжения падающей волны и параметрах материалов. Уравнение имеет решение в том и только в том случае, если $|U|$ меньше по крайней мере одной из величин $|V|$ или $|W|$. Это требование и является условием, оговоренным в 1. В случае существования решения, оно не является единственным — увеличивая толщину слоя, можно получить бесконечный ряд решений; однако практическое значение могут иметь только первые из них, отвечающие наименьшим толщинам слоев.

3. Ввиду сложности уравнения, решать его приходится графически, вычисляя значения левой части (10) для различных значений h и находя точку пересечения получающегося графика с осью абсцисс. Этим путем, однако, можно найти только толщины слоя, обращающие в нуль отраженную поперечную волну. Если желательно получить частотную характеристику эффекта подавления поперечных волн, то необходимо провести более полный расчет, вычисляя по (8) значения $|B|$ для ряда значений толщины слоя или ряда значений частоты звука.



Фиг. 2

В качестве примера на фиг. 2 дан результат подобного расчета для слоя из кадмия, нанесенного на сталь. При расчете были приняты следующие значения параметров:

$$\rho = 7{,}8\ г/см^3,\ c_l = 5{,}85\cdot10^5\ см/сек,\ c_t = 3{,}23\cdot10^5\ см/сек,$$
$$\rho' = 8{,}6\ г/см^3,\ c_l' = 2{,}78\cdot10^5\ см/сек,\ c_t' = 1{,}5\cdot10^5\ см/сек.$$

График составлен для значений углов $\chi = 30, 45, 60°$. Оказывается, что в этом случае обращение в нуль амплитуды отраженной поперечной волны требует почти одинаковой толщины слоя при всех рассмотренных углах падения (около 0,45 длины продольной волны в кадмии; для частоты 1 *мггц* требуется толщина слоя около 1,3 *мм*). Ширина полосы, внутри которой амплитуда не превосходит 0,1, меняется от 6,5 до 10%. Расширение полосы возможно путем использования нескольких слоев из различных материалов, наносимых на поверхность тела последовательно.

Укажем еще на вполне аналогичную задачу о подавлении продольной волны, возникающей при отражении от поверхности твердого тела падающей на нее поперечной волны. Здесь задача также решается путем применения твердого слоя, наносимого на поверхность тела, и ход решения вполне подобен проведенному выше.

В заключение выражаю благодарность Н. С. Каневской, выполнившей всю расчетную часть работы.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
21 февраля 1956 г.