АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том III 1957 Вып. 2

КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ ПОЛЯ

Л. А. Чернов

Получены формулы, устанавливающие связь между корреляционной функцией для флюктуаций поля и автокорреляционными функциями для флюктуаций уровня и фазы.

Флюктуации поля при распространении волны в среде со случайными неоднородностями обусловлены как флюктуациями амплитуды, так и флюктуациями фазы. Поэтому можно предполагать, что корреляционные свойства флюктуаций поля тесно связаны с корреляционными свойствами флюктуаций амплитуды и фазы. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы эту связь установить. Тогда можно будет определить корреляционную функцию для флюктуаций поля, пользуясь известными [1] автокорреляционными функциями для флюктуаций амплитуды и фазы. Ограничимся рассмотрением поперечной корреляции.

Будем характеризовать поле величиной p. В акустике это может быть, например, давление. Тогда можно записать

$$p = A_0 \exp(L + iS), \tag{1}$$

где L и S — соответственно флюктуации уровня и фазы (фазовый множитель $\exp\,[i(kx - \omega t)]$ отброшен).

Если обозначить поля в двух точках через p_1 и p_2, то корреляционная функция флюктуаций поля Δp_1 и Δp_2 определится следующим равенством:

$$\overline{\Delta p_2^* \cdot \Delta p_1} = \overline{p_2^* p_1} - \overline{p_2^*} \cdot \overline{p_1}, \tag{2}$$

где черта наверху означает статистическое усреднение. Как видно из (2), вычисление корреляционной функции флюктуаций поля сводится к вычислению среднего поля $\bar{p}$ и корреляционной функции поля $\overline{p_2^* p_1}$. Начнем с вычисления среднего поля $\bar{p}$.

Необходимо подчеркнуть, что для вычисления среднего от множителя $\exp(L + iS)$ недостаточно знания моментов первого $(\bar{L}, \bar{S})$ и второго $(\overline{L^2}, \overline{S^2}, \overline{LS})$ порядков. Для этого необходимо знать или бесконечное множество моментов всех порядков, или функцию распределения случайных величин L и S. Можно утверждать, что распределение случайных величин L и S будет нормальным. Действительно всю дистанцию, на которой происходит накапливание величин L и S, можно разбить на большое число отрезков длиной порядка радиуса корреляции показателя преломления в среде. Тогда изменения величин L и S на различных участках будут статистически независимы. Следовательно, величины L и S будут слагаться из большого числа случайных независимых величин. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, доказанной Ляпуновым, такие величины подчиняются нормальному закону распределения. Для двух случайных зависимых между собой величин L и S закон распределения запишется следующим образом:

$$f(L,\ S)\, dL dS = \frac{H}{\pi} \exp\,[-(aL^2 + 2bLS + cS^2)]\, dL dS, \tag{3}$$

где

$$H = \sqrt{ac - b^2}, \qquad ac - b^2 > 0. \tag{4}$$

Параметры распределения a, b и c могут быть легко выражены через средние квадраты флюктуаций $\overline{L^2}$ и $\overline{S^2}$ и коэффициент взаимной корреляции R_{ls} между ними:

$$a = \frac{1}{2\overline{L^2}(1-R_{ls}^2)}, \quad c = \frac{1}{2\overline{S^2}(1-R_{ls}^2)}, \quad b = \frac{R_{ls}}{2\sqrt{\overline{L^2}}\sqrt{\overline{S^2}}(1-R_{ls}^2)}. \tag{5}$$

Среднее от множителя $\exp(L+iS)$ теперь вычисляется при помощи (3) без труда. Согласно (1) для среднего поля получаем

$$\overline{p} = A_0 \exp\left(\frac{1}{2}\overline{L^2} - \frac{1}{2}\overline{S^2} + i\sqrt{\overline{L^2}}\cdot\sqrt{\overline{S^2}}\cdot R_{ls}\right). \tag{6}$$

Перейдем к вычислению корреляционной функции поля $\overline{p_2^* p_1}$. На основании (1)

$$\overline{p_2^*\cdot p_1} = A_0^2 \overline{\exp[L_1 + L_2 + i(S_1 - S_2)]}. \tag{7}$$

Легко показать, что множители $\exp(L_1+L_2)$ и $\exp[i(S_1-S_2)]$ статистически независимы. С этой целью вычислим среднее от произведения $(L_1+L_2)(S_1-S_2)$. Получим $\overline{(L_1+S_2)(S_1-S_2)} = \overline{L_1S_1} - \overline{L_2S_2} + \overline{L_2S_1} - \overline{L_1S_2}$. Так как любые две точки в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, равноправны, то

$$\overline{L_1S_1} = \overline{L_2S_2}, \qquad \overline{L_2S_1} = \overline{L_1S_2}$$

и, следовательно,

$$\overline{(L_1+L_2)(S_1-S_2)} = 0. \tag{8}$$

Если флюктуации статистически независимы, то коэффициент корреляции обращается в нуль. Обратное утверждение, вообще говоря, неправильно: из равенства нулю коэффициента корреляции не следует статистическая независимость. Если, однако, флюктуации подчиняются нормальному закону (нормальной корреляции), то обратное утверждение также правильно. Следовательно, из (8) вытекает статистическая независимость флюктуаций (L_1+L_2) и (S_1-S_2), в то время как все четыре величины L_1, L_2, S_1 и S_2 попарно между собой зависимы. Любые функции от независимых флюктуаций также будут статистически независимы. Поэтому

$$\overline{\exp[L_1+L_2+i(S_1-S_2)]} = \overline{\exp(L_1+L_2)}\cdot\overline{\exp[i(S_1-S_2)]}. \tag{9}$$

Для разности флюктуаций фаз $\xi = S_1 - S_2$ напишем закон распределения в следующем виде:

$$\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\xi^2}}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\overline{\xi^2}}\right)\cdot d\xi, \tag{10}$$

где $\overline{\xi^2} = 2\overline{S^2}(1-R_s)$, R_s — коэффициент автокорреляции для флюктуаций фазы. На основании (10) получим

$$\overline{\exp[i(S_1-S_2)]} = \exp[\overline{S^2}(1-R_s)]. \tag{11}$$

Аналогично для суммы уровней $\eta = L_1 + L_2$ закон распределения имеет вид:

$$\psi(\eta)\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\eta^2}}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\overline{\eta^2}}\right)d\eta, \tag{12}$$

где $\overline{\eta^2} = 2\overline{L^2}(1+R_l)$, R_l — коэффициент автокорреляции для флюктуаций уровня. При помощи (12) получим

$$\overline{\exp(L_1+L_2)} = \exp[\overline{L^2}(1+R_l)]. \tag{13}$$

На основании (11) и (13) формула (7) приобретает вид:

$$\overline{p_2^* \cdot p_1} = A_0^2 \exp(2\overline{L^2}) \cdot \exp[\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1)]. \quad (14)$$

Если две точки сливаются, то формула (14) дает следующие выражения для среднего квадрата амплитуды волны:

$$\overline{|p|^2} = A_0^2 \exp(2\overline{L^2}). \quad (15)$$

Из последней формулы следует, что поток энергии с дистанцией растет, так как растут с дистанцией флюктуации уровня. Разумеется, этот вывод находится в противоречии с законом сохранения энергии: нет источников, за счет которых энергия в волне могла бы увеличиваться по мере ее распространения. Причина кроется в методе малых возмущений, при помощи которого получено исходное выражение (1). Дело в том, что за нулевое приближение в этом методе принимается плоская волна $A_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, на которую накладываются рассеянные волны. Поскольку затухание плоской волны не учитывается, ее энергия остается постоянной, и к этой энергии добавляется энергия рассеянных волн тем бо̀льшая, чем больше путь, пройденный волной в неоднородной среде. Это и ведет к тому, что энергия результирующего поля растет с дистанцией. В действительности, энергия первичной волны уменьшается за счет рассеяния: регулярное волновое поле превращается в нерегулярное так, что результирующий поток остается постоянным и не зависит от дистанции. Теорию можно привести в согласие с законом сохранения энергии, если ввести нормирующий множитель $\exp(-\overline{L^2})$, учитывающий затухание регулярного поля, полагая

$$p' = \exp(-\overline{L^2}) \cdot p. \quad (16)$$

Тогда для среднего нормированного поля на основании (6) получим

$$\overline{p'} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{L^2} - \frac{1}{2}\overline{S^2} + i\sqrt{\overline{L^2}} \cdot \sqrt{\overline{S^2}} \cdot R_{ls}\right), \quad (17)$$

откуда следует, что с дистанцией среднее поле стремится к нулю. Корреляционная функция нормированных полей на основании (14) определится, соответственно, формулой:

$$\overline{p_2'^* p_1'} = A_0^2 \exp[\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1)]. \quad (18)$$

Теперь можно определить корреляционную функцию для флюктуаций поля. На основании (2), (17) и (18) получаем

$$\overline{\Delta p_2^* \cdot \Delta p_1} = A_0^2\{\exp[\overline{L^2}(R_l - 1) + \overline{S^2}(R_s - 1)] - \exp[-(\overline{L^2} + \overline{S^2})]\}. \quad (19)$$

Последняя формула решает поставленную задачу: она определяет корреляционную функцию флюктуаций поля через коэффициенты автокорреляции R_l и R_s флюктуаций уровня и фазы.

В случае малых флюктуаций (19) приобретает особенно простой вид:

$$\overline{\Delta p_2^* \cdot \Delta p_1} = A_0^2(\overline{L^2} R_l + \overline{S^2} R_s), \quad (20)$$

т. е., корреляционная функция малых флюктуаций поля определяется суммой автокорреляционных функций флюктуаций уровня и фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов. Корреляция флюктуаций амплитуды и фазы при распространении волны в среде со случайными неоднородностями. Акуст. журн., 1955, 1, 1, 89—95.

Ярославский педагогический институт имени К. Д. Ушинского

Поступила в редакцию 9 января 1957 г.