АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IV 1958 Вып. 2

СПЕКТР ПУЛЬСАЦИЙ В ФОКУСЕ ЛИНЗЫ

Э. А. Бляхман

Исследован спектр пульсаций поля в фокусе линзы, обусловленных движением среды, содержащей случайные неоднородности. Показано, что линза действует как фильтр, изменяя распределение энергии по частотам.

Распространение волн в реальных средах сопровождается флюктуациями поля в точке приема. Это явление связано с рассеянием волны на случайных неоднородностях. Суперпозиция первичной волны и рассеянных волн вызывает флюктуации поля.

Если перед приемником поместить фокусирующую систему, то дифракционная картина за ней также будет флюктуировать, причем масштабы флюктуаций будут существенно зависеть от размеров линзы: с увеличением размера линзы флюктуации амплитуды и фазы и флюктуации поля будут уменьшаться [1,2]. Это явление называют интегрирующим действием больших линз. От размеров линзы зависят не только масштабы пульсаций, но и их спектральный состав.

Настоящая работа посвящена исследованию спектра пульсаций поля в фокусе линзы.

Для исследования спектра случайной функции воспользуемся теоремой Биркгофа — Хинчина, которая устанавливает связь между спектральной интенсивностью и функцией корреляции в виде

$$\overline{A^2(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \tag{1}$$

где $\overline{A^2(\omega)}$ — спектральная интенсивность, $R(\tau)$ — функция корреляции для пульсаций поля Δp, связанная с пульсациями поля следующим соотношением:

$$R(\tau) = \overline{\Delta p(t) \, \Delta p^*(t+\tau)}. \tag{2}$$

Из формулы Дебая следует, что пульсации поля в фокусе линзы определяются следующим выражением:

$$\Delta p = \frac{i}{\lambda F} \int_S \Delta p_j ds, \tag{3}$$

где Δp_j — пульсация поля на поверхности линзы. Взяв комплексно-сопряженное значение пульсации в момент времени $t + \tau$, перемножив и усреднив по времени, получим

$$R(\tau) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \iint_{SS} R(l, \tau) \, ds_1 ds_2, \tag{4}$$

где $R(l,\tau) = \overline{\Delta p_1(t) \Delta p_2^*(t+\tau)}$ представляет собой пространственно-временную функцию корреляции пульсаций поля падающей волны $\Delta p_1(t)$ и $\Delta p_2^*(t+\tau)$ в различных точках поверхности линзы, находящихся на

расстоянии l. Таким образом, мы выразили временную функцию корреляции в фокусе через пространственно-временную функцию корреляции на поверхности линзы.

Функцию $R(\tau)$ мы вычислим для случая упорядоченного движения (дрейфа) неоднородностей с постоянной скоростью. Легко показать, что при таком предположении о характере движения пространственно-временная функция корреляции $R(l,\tau)$, определенная в неподвижной системе координат, связанной с линзой, может быть сведена к чисто пространственной функции корреляции $R(l)$ в системе координат, связанной с неоднородностями. Не ограничивая общности, можно оси координат yz в плоскости, перпендикулярной направлению распространения сигнала, выбрать так, чтобы одна из них, например y, была параллельна проекции скорости дрейфа неоднородностей на плоскость yz. В движущейся системе координат, связанной с неоднородностями, имеет место соотношение:

$$\Delta p\,(A, t+\tau) = \Delta p\,(A, t),$$

поскольку выполняется условие квазистатичности: за время τ не происходит заметных изменений поля в движущейся системе координат. При переходе к неподвижной системе координат, связанной с линзой, будем иметь

$$\Delta p\,(A, t+\tau) = \Delta p\,(A', t),$$

где $\Delta p\,(A', t)$ — значение пульсации, которое за время τ придет из A' в A. Отсюда для функции корреляции получим

$$\overline{\Delta p\,(A, t+\tau)\,\Delta p^*(B, t)} = \overline{\Delta p\,(A', t)\,\Delta p^*(B, t)}. \tag{5}$$

или $R\,(l, \tau) = R\,(l')$.

Так как отрезок $\overline{AA'} = v\tau$, а $l = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, то $l' = \sqrt{(y_1 - y_2 - v\tau)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Итак, достаточно знать вид пространственной функции корреляции пульсаций поля в движущейся системе координат, чтобы получить из нее при помощи преобразования Галилея пространственно-временную функцию корреляции $R\,(l, \tau)$ в неподвижной системе координат.

Дальнейшие вычисления проведем для нормального коэффициента корреляции флюктуаций показателя преломления в случае, когда эти флюктуации малы. При этих условиях пространственная функция корреляции пульсаций поля имеет вид:

$$R\,(l) = \alpha \exp\,(-\,l^2/a^2), \tag{6}$$

причем коэффициент $\alpha = \sqrt{\pi}\,|\,\overline{p}\,|^2 R_0 a k^2 L$, где $\overline{p}$ — среднее поле, a — масштаб неоднородностей, или радиус корреляции флюктуаций показателя преломления в среде, k — волновое число, L — расстояние, пройденное волной в неоднородной среде, R_0 — средний квадрат флюктуаций показателя преломления [3]. Таким образом, пространственно-временная функция корреляции пульсаций поля на поверхности линзы для случая дрейфа имеет вид:

$$R\,(l, \tau) = \alpha \exp\{-\,[(y_1 - y_2 - v\tau)^2 + (z_1 - z_2)^2]/a^2\}. \tag{7}$$

При $l = 0$ получается временная функция корреляции пульсаций поля до линзы

$$R\,(0, t) = \alpha \exp\,(-\,v^2\tau^2/a^2), \tag{8}$$

спектр которой на основании (1), имеет вид:

$$\overline{A_1^2(\omega)} = \sqrt{\pi}\alpha \frac{a}{v} \exp\left(-\,\frac{a^2}{4v^2}\,\omega^2\right). \tag{9}$$

Перейдем теперь к нахождению функции $R(\tau)$. Для простоты вычислений будем предполагать линзу квадратной. Из (4) и (7) получим

$$R(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda^2 F^2} \iiiint\limits_{-h/2}^{h/2} e^{-\frac{(y_1-y_2-v\tau)^2+(z_1-z_2)^2}{a^2}} dy_1 dy_2 dz_1 dz_2. \tag{10}$$

Элементарное интегрирование дает следующее значение $R(\tau)$:

$$R(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda^2 F^2} \frac{\pi a^4}{2} \left[\frac{h}{a}\Phi\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-\frac{h^2}{a^2}} - 1\right)\right] \left\{\left(\frac{h+v\tau}{a}\right)\Phi\left(\frac{h+v\tau}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h-v\tau}{a}\right)\Phi\left(\frac{h-v\tau}{a}\right) - 2\frac{v\tau}{a}\Phi\left(\frac{v\tau}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{(h+v\tau)^2}{a^2}} + e^{-\frac{(h-\tau v)^2}{a^2}} - 2e^{-\frac{v^2\tau^2}{a^2}}\right]\right\}, \tag{11}$$

где Φ — интеграл вероятностей. При $\tau = 0$ значение функции корреляции $R(0)$ совпадает с известным выражением для пространственных пульсаций поля в фокусе линзы [2]. С ростом τ корреляционная функция $R(\tau)$ монотонно убывает, асимптотически стремясь к нулю.

Используя теорему Биркгофа — Хинчина в формуле (1), при помощи не очень сложных, но весьма громоздких вычислений мы получим спектр функции $R(\tau)$ в следующем виде:

$$\overline{A^2(\omega)} = B\left(\frac{\sin\frac{\omega h}{2v}}{\frac{\omega h}{2v}}\right)^2 \exp\left(-\frac{a^2}{4v^2}\omega^2\right), \tag{12}$$

где не зависящая от ω постоянная равна

$$B = \frac{\pi\alpha a^3 h^2}{2\lambda^2 F^2 v}\left[\frac{h}{a}\Phi\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-h^2/a^2} - 1\right)\right].$$

Сравнивая полученный результат с (9), видим, что множитель $e^{-\frac{a^2}{4v^2}\omega^2}$ совпадает с точностью до постоянной с выражением для спектральной интенсивности в падающей волне. Наличие линзы приводит к появлению множителя вида $(\sin x/x)^2$. Этот множитель имеет главный максимум на нулевой частоте, минимумы при $x = \pm n\pi$ и второстепенные максимумы, для которых x находится из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} x - x = 0$. Численные значения корней этого уравнения ($x = 1{,}430\ \pi;\ 2{,}459\ \pi; \ldots$) асимптотически приближаются к нечетным кратным $\pi/2$.

Мы видим, что линза действует как фильтр, выделяя характерные частоты, которые пропорциональны скорости дрейфа неоднородностей и обратно пропорциональны размерам линзы. Последний результат находит экспериментальное подтверждение при наблюдении мерцания звезд телескопами разных диаметров.

Пользуюсь случаем выразить глубокую признательность Л. А. Чернову за постановку проблемы и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Красильников и В. И. Татарский. О зависимости среднего квадратичного флюктуаций фазы и амплитуды от размеров объектива при наблюдении мерцания звезд. ДАН СССР, 1953, 3, 435—438.
2. Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями (докторская диссертация). Акустический институт АН СССР, 1955.
3. Л. А. Чернов. Корреляция флюктуаций амплитуды и фазы при распространении волны в среде со случайными неоднородностями. Акуст. журн., 1955, 1, 1 89—95.

Ярославский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступила в редакцию 28 июня 1957 г.