АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IV 1958 Вып. 2

О ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В СЛОЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Л. Газарян

Рассмотрено поле боковой волны; в случае наличия угла полного отражения исследовано поведение поля при частотах, близких к критической частоте одной из нормальных волн.

Как известно [1], поле точечного гармонического излучателя, помещенного в жидкий однородный слой со свободной верхней границей, лежащий на жидком однородном полупространстве, представляется на далеких от источника расстояниях в виде суммы нормальных волн и некоторого контурного интеграла («боковая волна»). При этом характер поля существенно зависит от частоты. Свойства нормальных волн рассмотрены достаточно подробно в [1]; ниже мы займемся исследованием частотной зависимости поля боковой волны.

Потенциал скоростей поля точечного сферического гармонического излучателя с объемной скоростью — $1/4\pi$, помещенного в слой на высоте z_0 от основания, дается внутри слоя формулой*

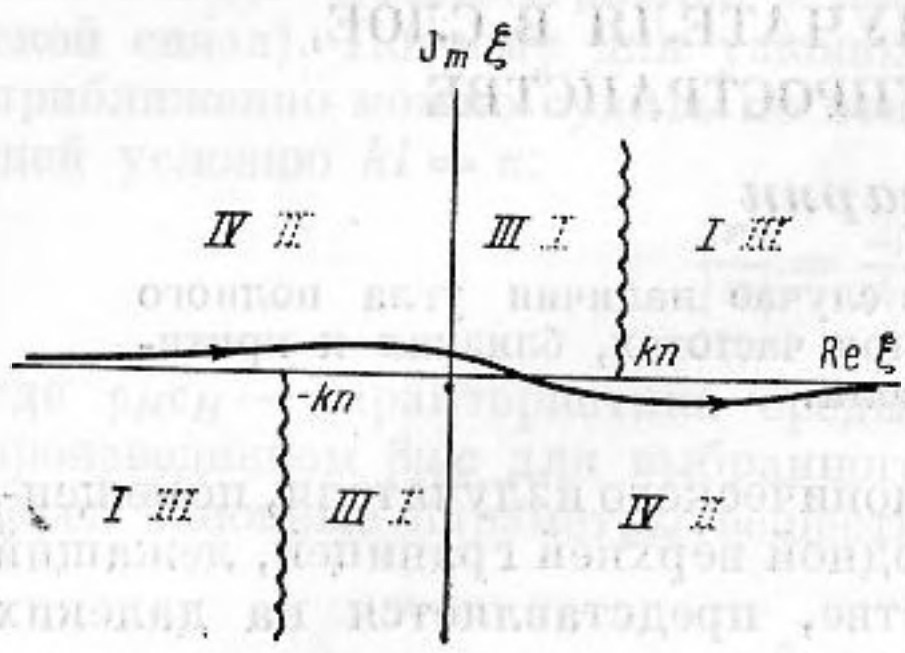
$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi^2-k^2n^2}\,\dfrac{\operatorname{sh}(z\sqrt{\xi^2-k^2})}{\sqrt{\xi^2-k^2}} + m\operatorname{ch}(z\sqrt{\xi^2-k^2})}{\sqrt{\xi^2-k^2n^2}\,\dfrac{\operatorname{sh}(h\sqrt{\xi^2-k^2})}{\sqrt{\xi^2-k^2}} + m\operatorname{ch}(h\sqrt{\xi^2-k^2})} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}[(h-z_0)\sqrt{\xi^2-k^2}]}{\sqrt{\xi^2-k^2}} H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi d\xi. \qquad (1)$$

Здесь h — толщина слоя, z — высота точки наблюдения от основания слоя, r — горизонтальное расстояние от источника, m — отношение плотности вещества полупространства к плотности вещества слоя, n — отношение скорости звука в слое к скорости звука в полупространстве, k — волновое число в слое. В (1) предполагается $z \leqslant z_0$, в случае $z > z_0$ следует заменить в (1) z на z_0 и наоборот. Контур интеграции обходит особые точки подынтегрального выражения, лежащие на действительной оси, сверху при $\xi \leqslant 0$ и снизу при $\xi > 0$. Положение контура на двулистной римановой поверхности двузначной функции $\alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2n^2}$ изображено на фиг. 1. Здесь волнистыми линиями проведены разрезы, римские цифры обозначают номера квадрантов, в которых лежат значения α (I, где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Im}\alpha > 0$ и т. д.), пунктиром нанесены величины, относящиеся к нижнему листу. Для вычисления φ при больших r контур интегрирования деформируют вверх, так что он превращается в вертикальную петлю, охватывающую точку разветвления $\xi = kn$. При этом (1) сводится к сумме вычетов, умноженной на $2\pi i$ в полюсах подынтегрального выражения, задетых при деформации контура (нормальные волны) и интеграла по вертикальной петле (боковая волна). Можно показать, что когда частота равна нулю, все полюсы расположены на нижнем листе в III и II квадрантах значений α, симметрично относительно осей $\operatorname{Im}\xi = 0$ и $\operatorname{Re}\xi = 0$. С повышением частоты от нуля полюсы перемещаются, сохраняя сим-

* См. [1,2].

метрию, причем поведение их существенно зависит от знака величины $n-1$. Если $n>1$, то полюсы никогда не могут попасть на действительную или мнимую ось ξ. В этом случае при деформировании контура могут быть задеты только полюсы, попавшие на верхний лист в область $0<\mathrm{Re}\,\xi<kn$ $\mathrm{Im}\,\xi>0$. Эти полюсы соответствуют экспоненциально затухающим с возрастанием r нормальным волнам. При $n<1$ с возрастанием частоты каждая пара симметричных относительно действительной оси полюсов перемещается так, что полюсы приближаются на нижнем листе к действительной оси и сталкиваются в некоторой ее точке, лежащей вне отрезка $-kn\leqslant\xi\leqslant kn$. С дальнейшим повышением частоты один из полюсов удаляется от точки разветвления, оставаясь все время на нижнем листе на действительной полуоси. Другой же полюс приближается по действительной оси к точке разветвления, попадает в нее на некоторой критической частоте и с дальнейшим повышением частоты снова удаляется от начала координат, оставаясь на действительной оси, но уже находясь на верхнем листе. Таким образом, половина полюсов, лежащих в области $\mathrm{Re}\,\xi\geqslant 0$, при достаточно высоких частотах (точнее, при частотах выше критической, соответствующей данному полюсу) дают незатухающие нормальные волны. Ограничиваясь этими замечаниями о нормальных волнах, перейдем к вычислению асимптотического разложения по обратным степеням r для боковой волны. Заметим, что подынтегральное выражение в (1) либо ограничено при $\xi=kn$, либо (при критических частотах) имеет особенность вида $(\xi-kn)^{-1/2}$. В обоих случаях интеграл по бесконечно малой окружности, охватывающей точку разветвления, равен нулю. Ввиду этого получим для потенциала скоростей φ_1 боковой волны



Фиг. 1

$$\varphi_1=\int\limits_{kn}^{kn+i\infty}\{V(\alpha_{\mathrm{I}},\ \beta)-V(\alpha_{\mathrm{III}},\beta)\}\ \frac{\mathrm{sh}\,[(h-z_0)\,\beta]}{\beta}\,H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi d\xi,$$

где

$$V(\alpha,\beta)=\frac{m\beta\,\mathrm{ch}\,\beta z+\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta z}{m\beta\,\mathrm{ch}\,\beta h+\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta h},\qquad \alpha=\sqrt{\xi^2-k^2n^2},\quad \beta=\sqrt{\xi^2-k^2}.$$

Римские цифры указывают, в каком квадранте лежат значения α. Учитывая, что на пути интеграции $\alpha_{\mathrm{III}}=-\alpha_{\mathrm{I}}$, получим

$$\varphi_1=-2m\int\limits_{kn}^{kn+i\infty}\frac{\mathrm{sh}\,[(h-z)\,\beta]\,\mathrm{sh}\,[(h-z_0)\,\beta]}{m^2\beta^2\,\mathrm{ch}^2\,h\beta-\alpha^2\,\mathrm{sh}^2\,h\beta}\,\alpha_{\mathrm{I}}H_0^{(1)}(\xi r)\,\xi d\xi. \tag{2}$$

В (2) подразумевается, что в случае, если на пути интеграции в области $\mathrm{Im}\,\xi>0$ имеются полюсы, то они обходятся; способ обхода несущественен, ибо интеграл по замкнутому контуру, охватывающему такой полюс, асимптотически равен нулю. Из того, что на нашем контуре справедливо соотношение (см. [3])

$$H_0^{(1)}(\xi r)=\left(\frac{2}{\pi\xi r}\right)^{1/2}e^{i(\xi r-\pi/4)}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^s\frac{(0,s)}{(2i\xi r)^s}+\theta\frac{(0,p)}{(2i\xi r)^p}\right\}\qquad(0\leqslant\arg\xi<\pi/2),$$

где $|\theta|\leqslant 1$, следует, что если в (2) подставить асимптотическое разложение функции $H_0^{(1)}(\xi r)$ и провести почленное интегрирование, то полу-

ченный формальный ряд, который будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f_s(r)}{r^s} \tag{3}$$

будет асимптотически равен φ_1 в том смысле, что для любого p выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^p\left|\varphi_1-\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{f_s(r)}{r^s}\right|=0.$$

Функция $f_s(r)$ равна с точностью до коэффициента интегралу

$$\int\limits_{kn}^{kn+i\infty}\left[\frac{\operatorname{sh}[(h-z)\beta]\operatorname{sh}[(h-z_0)\beta]}{m^2\beta^2\operatorname{ch}^2 h\beta-\alpha^2\operatorname{sh}^2 h\beta}\xi^{1/2-s}\alpha_{\mathrm{I}}\right]e^{i\xi r}d\xi. \tag{4}$$

Как известно, асимптотическое разложение по обратным степеням r для подобных интегралов можно получить, разлагая первый множитель подынтегрального выражения в ряд по степеням $(\xi-kn)^{1/2}$, и почленно интегрируя. Если найденные таким образом асимптотические разложения функций $f_s(r)$ подставить в (3) и сгруппировать члены одинакового порядка, то мы получим для φ_1 обычное асимптотическое разложение по обратным степеням r. Заметим, что разложение знаменателя в подынтегральном выражении имеет вид:

$$A+B(\xi-kn)+C(\xi-kn)^2+\ldots, \tag{5}$$

где

$$A=m^2k^2(n^2-1)\operatorname{ch}^2 kh\sqrt{n^2-1},$$

$$B=2nk\left(m^2\operatorname{ch}^2 kh\sqrt{n^2-1}-\operatorname{sh}^2 kh\sqrt{n^2-1}\right)+$$
$$+k^2hnm^2\sqrt{n^2-1}\operatorname{sh}2kh\sqrt{n^2-1}.$$

Отсюда видно, что в случае $n<1$ величина A может обращаться в нуль (это будет происходить при критических частотах), при этом $B\neq 0$. Из (4) и (5) следует, что разложение подынтегрального выражения начинается с члена $(\xi-kn)^{1/2}$ при некритической и $(\xi-k_n)^{-1/2}$ при критической частоте, а значит и порядок малости интеграла (4) по $1/r$ будет в этих двух случаях различен.

Проведение указанных выше преобразований для случая, когда частота отлична от критической, дает следующее выражение:

$$\varphi_1\sim\frac{2ne^{i\left(knr-\frac{\pi}{2}\right)}}{mk\nu^2\cos^2\varkappa\nu}\frac{1}{r^2}\left\{a_0-i\left(b_0+\frac{b_1}{\varkappa}\right)\frac{h}{r}-\left(c_0+\frac{c_1}{\varkappa}+\frac{c_2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{h}{r}\right)^2+\ldots\right\}, \tag{6}$$

где

$$a_0=\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0,$$

$$b_0=\frac{3n}{2\nu}\{2t\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0+\zeta_0\sin\varkappa\nu\zeta\cos\varkappa\nu\zeta_0+\zeta\cos\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0\},$$

$$b_1=-\frac{1}{n}\left\{1+\frac{3n^2}{\nu^2}\left(1+\frac{t^2}{m^2}\right)\right\}\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0,$$

$$c_0=\frac{15}{4}\frac{n^2}{\nu^2}\left\{\left(3t^2+1-\frac{\zeta_0^2+\zeta^2}{2}\right)\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0+\right.$$

$$\left.+\zeta\zeta_0\cos\varkappa\nu\zeta\cos\varkappa\nu\zeta_0+2t\left[\zeta_0\sin\varkappa\nu\zeta\cos\varkappa\nu\zeta_0+\zeta\cos\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0\right]\right\},$$

$$c_1 = -\frac{3}{8\nu}\left\{\left[12 + 5\frac{n^2}{\nu^2}\left(5 + 4\frac{t^2}{m^2}\right)\right](\zeta_0 \sin \varkappa\nu\zeta \cos \varkappa\nu\zeta_0 + \zeta \cos \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0) + \right.$$

$$\left. + 2t\left[12 + 5\frac{n^2}{\nu^2}\left(5 + \frac{4}{m^2} + \frac{8t^2}{m^2}\right)\right] \sin \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0\right\},$$

$$c_2 = \frac{3}{\nu^2}\left[3 + 5\frac{n^2}{\nu^2}\left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)\right]\left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right) \sin \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\zeta = 1 - \frac{z}{h}, \qquad \zeta_0 = 1 - \frac{z_0}{h},$$

$$\varkappa = kh, \qquad \nu = \sqrt{1 - n^2}, \qquad t = \operatorname{tg} \varkappa\nu.$$

В случае $n>1$ полученным выражением можно ограничиться. При $n<1$, как уже указывалось, необходимо еще получить асимптотическое разложение для критических частот. Заметим, что (6) нельзя использовать для вычислений не только при критических частотах, но и при частотах, близких к критическим. Последнее видно из того, что при близких к критическим частотах величина t очень велика и поэтому для не очень больших расстояний члены ряда (6) не будут убывать по абсолютной величине. Чтобы получить при $n<1$ выражение, пригодное для вычислений как при критических, так и при близких к критическим частотах, поступим следующим образом. Учитывая (5), величину, обратную знаменателю подынтегрального выражения, можно записать в следующем виде:

$$[A + B(\xi - kn)]^{-1}\left\{1 + \frac{C(\xi - kn)^2 + \ldots}{A + B(\xi - kn)}\right\}^{-1}.$$

Так как второе слагаемое в фигурной скобке обращается в нуль при $\xi = kn$, то мы можем разложить эту скобку в окрестности точки $\xi = kn$ в ряд по степеням второго слагаемого. Разлагая остальные множители в подынтегральном выражении как и раньше по степеням $(\xi - kn)^{1/2}$, группируя члены одинакового порядка по $(\xi - kn)$ и почленно интегрируя (интегралы при этом выражаются в конечном виде через элементарные функции и интегралы Френеля), мы получим формальный ряд, как легко видеть, асимптотически равный интегралу (4). Подставляя полученные выражения в (3) и группируя члены, содержащие множителем одинаковые степени r, мы получим ряд, асимптотически равный φ_1. Заметим, что указанный метод вычисления интегралов (4) весьма похож на примененный в [4] (см. также [5]). Согласно предложенной там процедуре, следовало бы найти корень ξ_0 выражения (5), обращающийся в kn при критической частоте, выделить из (5) множитель $\xi - \xi_0$, и оставшиеся величины разложить в ряд по степеням $\xi - kn$. В рассматриваемом случае, однако, ввиду сложной зависимости ξ_0 от параметров, примененный выше метод, по-видимому, более удобен. Проделывая указанные выше преобразования, получим

$$\varphi_1 \sim \frac{2ne^{i\left(knr - \frac{\pi}{2}\right)}}{mk\nu^2 \cos^2 \varkappa\nu} \frac{1}{r^2}\left\{P + Q\frac{h}{r} + R\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \ldots\right\}, \tag{7}$$

где

$$P = F \sin \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0,$$

$$Q = \frac{1}{4\varkappa n}\left[3\gamma(F - 1) - \frac{i}{2}F\right] \sin \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0 -$$

$$- \frac{n}{\nu}\gamma(F - 1)(\zeta_0 \sin \varkappa\nu\zeta \cos \varkappa\nu\zeta_0 + \zeta \cos \varkappa\nu\zeta \sin \varkappa\nu\zeta_0),$$

$$R=\left\{\frac{1}{32\varkappa^2n^2}\left[i\gamma(F-1)-\frac{9}{4}F-\gamma^2\left(F-1-\frac{3i}{2\gamma}\right)\right]-\right.$$

$$-\gamma^2\left[\left(i\gamma+\frac{5}{2}\right)F-i\gamma-1\right]\left[\frac{n^2}{\nu^2}(1-t^2)-\frac{t}{\varkappa\nu}\left(1+\frac{4}{m^2}\frac{n^2}{\nu^2}-3\frac{n^2}{\nu^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\varkappa^2\nu^2}\left(1+\frac{t^2}{m^2}\right)\right]\right\}\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0+\frac{1}{2\varkappa\nu}\left[\frac{i}{4}\gamma(F-1)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{5}{2}+\frac{n^2}{\nu^2}\right)\gamma^2\left(F-1-\frac{3i}{2\gamma}\right)\right](\zeta_0\sin\varkappa\nu\zeta\cos\varkappa\nu\zeta_0+\zeta\cos\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0)+$$

$$+\frac{n^2}{\nu^2}\gamma^2\left(F-1-\frac{3i}{2\gamma}\right)\left(\zeta\zeta_0\cos\varkappa\nu\zeta\cos\varkappa\nu\zeta_0-\frac{\zeta_0^2+\zeta^2}{2}\sin\varkappa\nu\zeta\sin\varkappa\nu\zeta_0\right).$$

Здесь

$$\gamma=\frac{r}{h}\frac{\nu}{2n}\frac{1}{\frac{1}{\varkappa\nu}\left(1+\frac{\operatorname{tg}^2\varkappa\nu}{m^2}\right)-\operatorname{tg}\varkappa\nu},\quad F=F(\gamma)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}\sqrt{t}}{1-i\frac{t}{\gamma}}dt.$$

При $\gamma\geqslant 0$ имеем

$$F(\gamma)=2i\gamma\sqrt{2\pi\gamma}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}-\cos\gamma\cdot\left[\frac{1}{2}-s(\gamma)\right]+\right.$$

$$\left.+\sin\gamma\left[\frac{1}{2}-C(\gamma)\right]-i\left(\sin\gamma\left[\frac{1}{2}-S(\gamma)\right]+\cos\gamma\left[\frac{1}{2}-C(\gamma)\right]\right)\right\},$$

где $S(\gamma)$ и $C(\gamma)$ — интегралы Френеля:

$$S(\gamma)=\int\limits_0^\gamma\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}dt,\quad C(\gamma)=\int\limits_0^\gamma\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}dt.$$

При $\gamma<0$, $F(\gamma)$ равно величине, комплексно сопряженной с $F(-\gamma)$. Ниже приводится таблица значений $F(\gamma)$. Заметим, что для $\gamma\geqslant 0$ имеем при малых γ

$$F(\gamma)=2i\gamma+\sqrt{2\pi}(1-i)\gamma^{3/2}+\ldots \tag{8}$$

и при больших γ

$$F(\gamma)\sim 1+i\frac{3}{2\gamma}-\frac{15}{4\gamma^2}-i\frac{105}{8\gamma^3}+\ldots \tag{9}$$

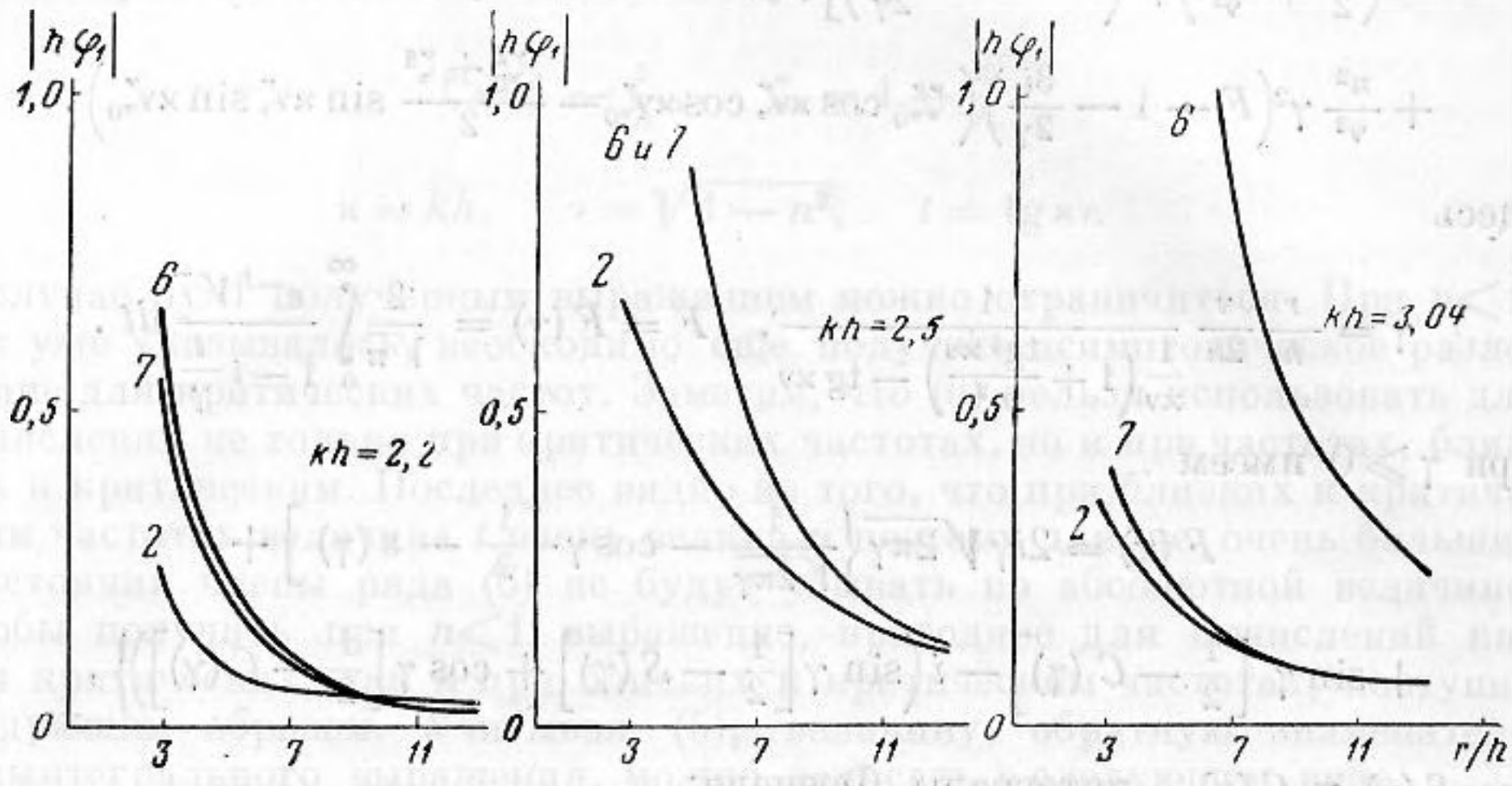
При больших γ (7) сводится к (6); в этом можно убедиться, подставляя вместо $F(\gamma)$ его асимптотическое выражение и группируя члены одинакового порядка по r. Критерием применимости (7) является малость 2-го и 3-го членов по сравнению с 1-м*.

Таблица

γ	ReF	ImF	γ	ReF	ImF	γ	ReF	ImF
0,00	0,0000	0,0000	0,09	0,041	0,120	0,9	0,43	0,37
0,01	0,0021	0,0175	0,10	0,047	0,130	1,0	0,46	0,38
0,02	0,0056	0,0330	0,2	0,11	0,20	1,5	0,60	0,38
0,03	0,0098	0,0475	0,3	0,16	0,26	2,0	0,68	0,36
0,04	0,0143	0,0609	0,4	0,22	0,30	2,5	0,76	0,34
0,05	0,0194	0,0737	0,5	0,27	0,32	3,0	0,79	0,31
0,06	0,0245	0,0860	0,6	0,32	0,34	5,0	0,89	0,24
0,07	0,0300	0,0975	0,7	0,36	0,35	7,0	0,94	0,19
0,08	0,036	0,109	0,8	0,39	0,36			

* Это соответствует допустимости обрыва разложений знаменателя и числителя подынтегрального выражения на первом члене.

На фиг. 2 приводится зависимость $|h\varphi_1|$ от r/h в случае $n = 0{,}83$; $m = 2$; $\zeta_0 = 1/2$; $\zeta = 1$ для трех различных частот, соответствующих $kh = 2{,}2$; $2{,}5$; $3{,}04$. Критической частоте соответствует $kh = 2{,}82$. На фигуре даны как точные значения, полученные численным интегрированием (2), так и вычисленные по формулам (6) и (7), с учетом одного первого члена. Мы видим, что для первых двух частот обе приближенные формулы дают практически одно и то же, для третьей же частоты формула (7) дает значительно лучший результат.



Фиг. 2

При помощи (7) можно проследить за изменением поля боковой волны на некотором фиксированном расстоянии $r \gg h$, когда частота меняется около одного из критических значений. Пока частота меньше критической и не очень близка к ней, имеем $\cos \varkappa\nu \sim 1$ и $\gamma \gg 1$. При этом можно пользоваться (9), и мы видим, что $\varphi_1 \sim 1/r^2$. С приближением частоты к критическому значению $\cos \varkappa\nu \to 0$ и $\gamma \to 0$. Пользуясь (8), мы видим, что коэффициенты ряда (7) после деления на $\cos^2 \varkappa\nu$ стремятся к конечным пределам (это следует и из самого способа получения (7)). При этом для критической частоты $\varphi_1 \sim 1/r$, т. е. величина поля возрастает на порядок относительно r. После того как частота превысила критическую, величина γ снова начинает возрастать, и φ_1 убывает, становясь снова порядка $1/r^2$. Однако в общем поле это убывание компенсируется полем появившейся нормальной волны, амплитуда которой, как известно, имеет порядок $1/\sqrt{r}$. В результате, суммарное поле возрастает еще на половину порядка относительно r. Этот процесс «выделения» нормальной волны из боковой особенно интересен для не очень больших r, ибо в этом случае возрастание поля на половину порядка относительно r не дает существенного увеличения поля, т. е. процесс появления нормальной волны будет замаскирован.

Автор благодарит В. П. Бажничкину за проделанные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Пекерис. Теория распространения звука взрыва в мелкой воде. Сб. «Распространение звука в океане». М., ИЛ, 1951.
2. Л. М. Бреховских. Распространение звуковых волн в слое жидкости между двумя поглощающими полупространствами. Докл. АН СССР, 1945, 48, 6, 422—425.
3. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949, стр. 245.
4. W. Pauli. On asymptotic series for functionsin the theory of diffraction of light. Phys. Rev., 1938, 54, 924—931.
5. Л. М. Бреховских. Отражение и преломление сферических волн. Усп. физ. наук, 1949, 38, 1, 1—41.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
19 апреля 1957 г.