

**О ПОЛЕ ИМПУЛЬСНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПОДВОДНОМ
ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ**

В. А. Полянская

Распространение звука импульсного точечного излучателя в подводном звуковом канале рассмотрено методом нормальных волн в приближении ВКБ для различных форм импульса. Показано, что наличие и величина области цилиндрического спада силы звука зависят от формы импульса. Результаты получают истолкование с точки зрения лучевой теории при помощи учета интерференции налагающихся лучей.

В задаче о сверхдальнем распространении звука в подводном звуковом канале существенную роль играет вопрос о характере убывания акустического поля с расстоянием при импульсном излучении. В работах [1, 2, § 39] этот вопрос решался для простейшей формы огибающей импульса путем подсчета числа лучей, приходящих в единицу времени в данную точку, в предположении энергетического суммирования. При этом выяснилось, что на некотором расстоянии от излучателя возможно существование области цилиндрического спада силы звука (как $\frac{1}{r}$) из-за увеличения с расстоянием числа лучей, налагающихся друг на друга. Размер этой области зависит от длительности импульса. На больших расстояниях сила звука спадает как $\frac{1}{r^2}$.

Ниже этот вопрос будет рассмотрен для различных форм импульса методом нормальных волн, использование которого соответствует, в случае применимости лучевого представления, учету интерференции лучей при их наложении. Будет показано, что величина области цилиндрического спада силы звука существенно зависит не только от длительности, но и от формы импульса. В частности, в случае прямоугольного импульса, заполненного несущей частотой, величина указанной области зависит от частоты заполнения.

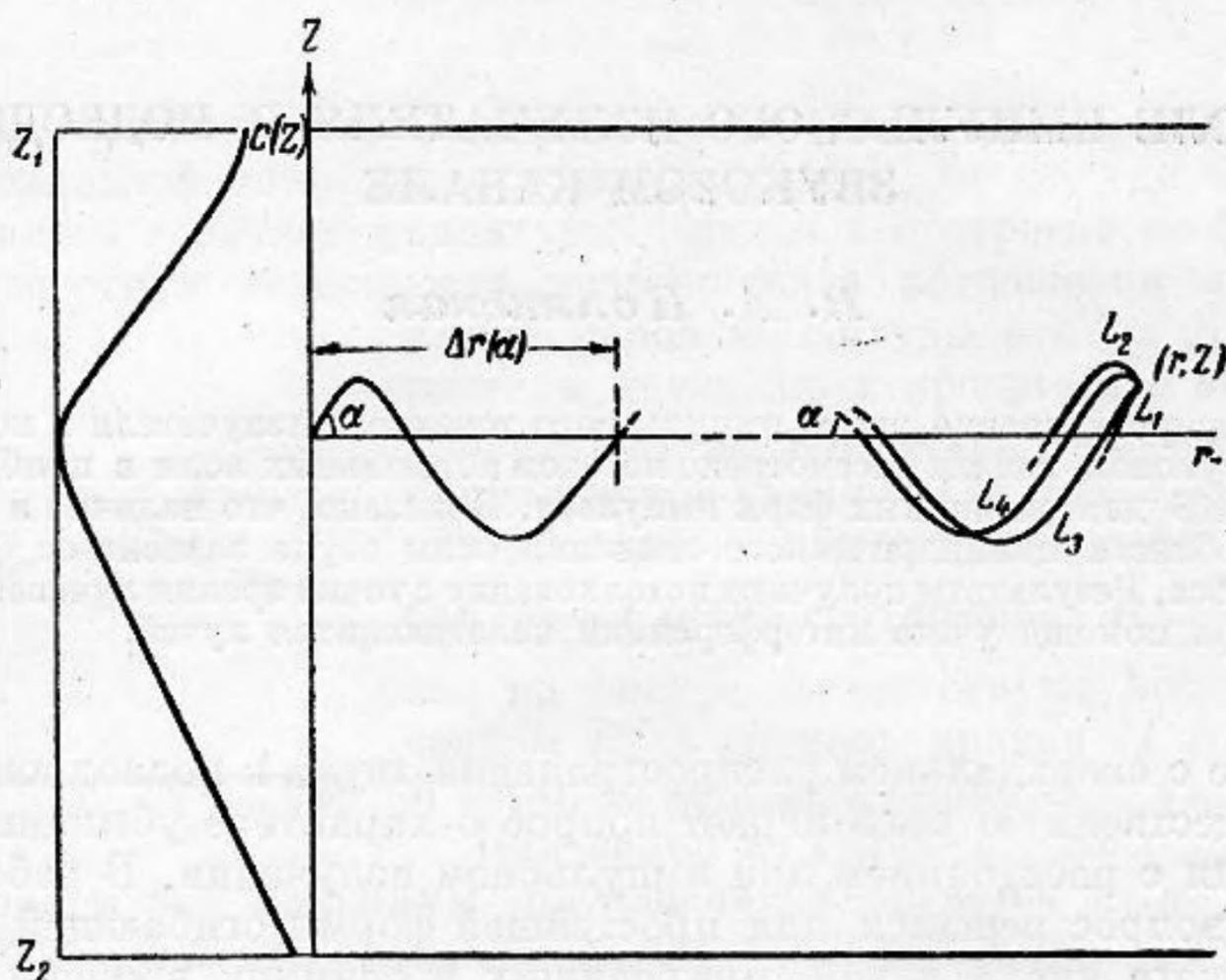
Примем следующее схематическое представление подводного волновода (см. фиг. 1). Будем рассматривать слой, ограниченный сверху при $z = z_1$ абсолютно мягкой, а снизу при $z = z_2$ абсолютно жесткой плоскими поверхностями. Начало координат выберем в точке минимума скорости звука $c(z)$. Последнюю будем считать монотонно возрастающей как вверх, так и вниз от этого уровня, а в остальном произвольной, но достаточно плавной, так, чтобы оказывался применимым метод фазового интеграла (метод ВКБ). Излучатель поместим на уровне минимума $c(z)$. Рассмотрение произвольного положения его не представляет трудностей.

Пусть излучаемый импульс имеет временной ход $p(t)$, т. е. пусть поле вблизи от излучателя при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0$ имеет вид $\Psi(r, z, t) = \frac{p\left(t - \frac{R}{c_0}\right)}{R}$. Если обозначим через $g(\omega)$ спектральную функцию $p(t)$, то $p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$. Поле в произвольной точке (r, z) запишет-

ся тогда в виде

$$\Psi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(\omega) \cdot \Phi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + k. c., \quad (1)$$

где $\Phi(\omega)$ — поле в волноводе, создаваемое гармоническим источником.



Фиг. 1

Согласно, например, [2, § 34], $\Phi(\omega)$ можно представить в виде суммы нормальных волн следующим образом:

$$\Phi(\omega) = \pi k_0 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(1 + V_2) \varphi_1(z, \alpha_l)}{\frac{d}{d\alpha} (1 - V_1 V_2) |_{\alpha_l}} H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha_l) \cdot \cos \alpha_l, \quad (2)$$

где для определенности взято поле при $z > 0$. В (2) введены следующие обозначения: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$; α_l — угол скольжения «квазиплоских» волн, составляющих нормальную волну номера l , на горизонте излучателя; $\varphi_1(z, \alpha_l)$ — поле «квазиплоской» волны на горизонте z ; V_1, V_2 — коэффициенты отражения плоской волны от областей $z > 0, z < 0$. Для данной нормальной волны угол α_l определяется, как функция частоты, из дисперсионного уравнения, которое в приближении метода ВКБ имеет вид:

$$k_0 \cdot Q(\alpha_l) = \pi(l - \kappa), \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Здесь } Q(\alpha_l) = \int_{z_{2k}}^{z_{1k}} \sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_l} dz, \quad n(z) = \frac{c_0}{c(z)}. \quad (3)$$

$$z_{1k} = \begin{cases} z_1, & n^2(z_1) > \cos^2 \alpha_l \\ z'_1, & n^2(z_1) < \cos^2 \alpha_l, \end{cases}$$

где z'_1 находится из уравнения $\cos^2 \alpha_l = n^2(z'_1)$. z_{2k} определяется соответственно. Параметр κ может принимать следующие значения:

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{при } n^2(z_1) < \cos^2 \alpha_l, \quad n^2(z_2) < \cos^2 \alpha_l \\ 2 & \text{или } n^2(z_1) > \cos^2 \alpha_l, \quad n^2(z_2) > \cos^2 \alpha_l \\ \frac{1}{4} & \text{при } n^2(z_1) > \cos^2 \alpha_l, \quad n^2(z_2) < \cos^2 \alpha_l. \end{cases}$$

Отметим, что при выводе формулы (3) использовалось асимптотическое представление, пригодное при больших l . Возможность употребления этой формулы при малых l , в особенности при $l=1$, показана для широкого класса частных случаев (см., например, [4]).

В приближении метода ВКБ:

$$\varphi_1(z, \alpha_l) = \begin{cases} \left[\frac{\sin^2 \alpha_l}{n^2(z) - \cos^2 \alpha_l} \right]^{1/4} [e^{ik_0 \mu(z)} + V_1 \cdot e^{-ik_0 \mu(z)}], & n^2(z) > \cos^2 \alpha_l \\ \left[\frac{\sin^2 \alpha_l}{\cos^2 \alpha_l - n^2(z)} \right]^{1/4} e^{ik_0 \mu(z_1) - k_0 \int_{z_1}^z \sqrt{\cos^2 \alpha_l - n^2(z)} dz}, & n^2(z) < \cos^2 \alpha_l; \end{cases} \quad (4)$$

$$V_1 = e^{2ik_0 \mu(z_{1k}) - i\pi \delta_1}, \quad V_2 = e^{-2ik_0 \mu(z_{2k}) - i\pi \delta_2}, \quad (5)$$

где $\mu(z) = \int_0^z \sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_l} dz$,

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n^2(z_1) < \cos^2 \alpha_l \\ 1, & n^2(z_1) > \cos^2 \alpha_l, \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n^2(z_2) < \cos^2 \alpha_l \\ 0, & n^2(z_2) > \cos^2 \alpha_l. \end{cases}$$

Групповая скорость нормальной волны номера l находится из (3) простым дифференцированием:

$$U_l(\omega) = \frac{d\omega}{dk_l} = \frac{c_0 \cos \alpha_l}{\cos^2 \alpha_l + \frac{Q(\alpha_l)}{R(\alpha_l)}}, \quad (6)$$

где

$$k_l = \frac{\omega}{c_0} \cos \alpha_l, \quad R(\alpha_l) = \int_{z_{1k}}^{z_{2k}} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha_l}}.$$

Приведем графики $U_1(\omega)$ для двух частных случаев распределения скорости звука (фиг. 2). Здесь $c(z)$ выбрано в виде

$$c(z) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - 2a_i |z|}}, \quad i = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 2, & z < 0, \end{cases} \quad (7)$$

причем $z_1 = 100$ м, $z_2 = 900$ м, $a_2 = 0,12 \cdot 10^{-4}$ м⁻¹. График I соответствует $a_1 = 0$, график II — $a_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ м⁻¹.

Перейдем теперь к вычислению поля. Подставив (2) в (1), переменим местами порядок суммирования и интегрирования, законность чего предполагаем. Тогда получим

$$\Psi(r, z, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} g(\omega) B_l(\omega) e^{f_l(\omega)} d\omega + k. c., \quad (8)$$

где

$$f_l(\omega) = i(k_0 r \cos \alpha_l - \omega t), \quad B_l = \sqrt{\frac{k_0 \cos \alpha_l}{2\pi r}} \cdot \frac{(1+V_2) \varphi_1(z, \alpha_l)}{\frac{d}{d\alpha} (1-V_1 V_2)|_{\alpha_l}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Функция Ханкеля заменена в (8) ее асимптотическим представлением.

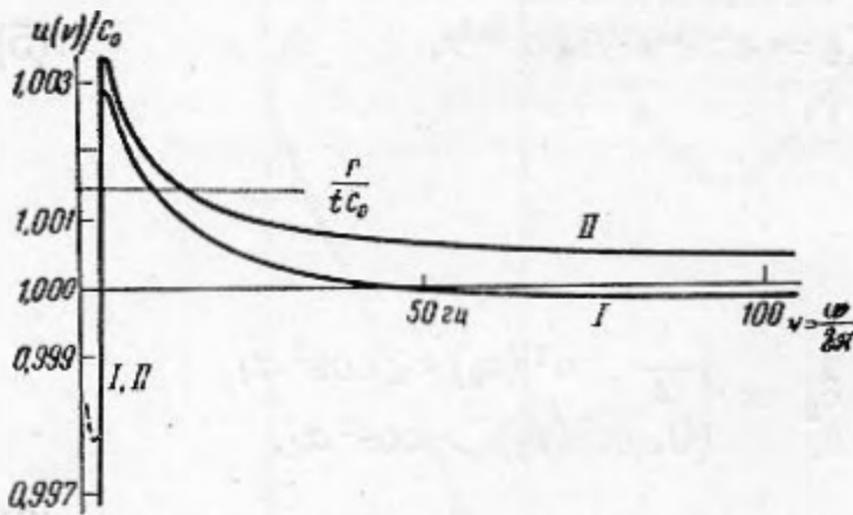
Рассмотрим вначале распространение импульсов с широким спектром частот. В этом случае применимым методом приближенного вычисления интеграла в (8) является метод стационарной фазы, пригодный на больших расстояниях. В результате вычислений поле нормальной волны номера l представляется в виде

$$\Psi_l(r, z, t) = g(\omega_{sl}) \cdot B_l(\omega_{sl}) \sqrt{\frac{-2\pi}{f''(\omega_{sl})}} e^{i(\omega_{sl}t - k \cdot r)} + k. c. \quad (9)$$

Здесь ω_{sl} , так называемая стационарная частота, находится из уравнения $\left. \frac{df_l}{d\omega} \right|_{\omega_{sl}} = 0$, или, согласно (8),

из уравнения

$$r = t \cdot U_l(\omega_{sl}). \quad (10)$$



Фиг. 2

Как видно из (9), зависимость поля Ψ_l в точке (r, z) от времени может быть представлена как произведение быстро осциллирующей функции, имеющей вид синусоиды с переменной частотой ω_{sl} на медленно меняющуюся амплитуду. Отметим, что возможно существование нескольких

(обычно двух-трех) стационарных точек по числу ветвей $U_l(\omega)$, пересекаемых ординатой $\frac{r}{t}$ (см. фиг. 2). Тогда $\Psi_l(r, z, t)$ состоит из нескольких слагаемых вида (9).

Отметим обстоятельство, характерное для случая применимости метода ВКБ. В уравнение (6) для $U_l(\omega)$ номер l и частота входят только через $\sin \alpha_l$. Следовательно, все нормальные волны характеризуются в момент t в точке (r, z) одним значением $\sin \alpha$. Поэтому $\sin \alpha$ и групповая скорость, взятые как функции от t , уже не зависят от номера l . Из сказанного, с учетом дисперсионного уравнения (3), следует также, что частоты ω_{sl} в момент t пропорциональны $(l - \kappa)$. Следовательно, сумма всех нормальных волн является квазипериодической по времени функцией с медленно меняющейся амплитудой и переменным периодом, который при $\kappa = 1/2$ равен одному периоду первой нормальной волны, а при $\kappa = 1/4$ — трем.

С учетом сделанных замечаний получим поле, соответствующее одной из ветвей $U_l(\omega)$, в виде

$$\Psi(r, z, t) = \frac{c_0^{1/2}}{2r} \cdot \frac{U(\alpha)}{\sqrt{U'(\alpha) \cdot Q(\alpha) \cdot R(\alpha) \cos \alpha \sqrt{n^2(z) - \cos^2 \alpha}}} \times \\ \times \sum_{l=1}^{\infty} g(\omega_{sl}) \cdot G_1 \cdot (1 + V_2) e^{i(\omega_{sl}t - k \cdot r)} [1 + \rho + \dots] + k. c. \quad (11)$$

Здесь $z \sin \alpha$ — функция от t , определяемая из (10), $G_1 = \varphi_1(z, \alpha) \times \left[\frac{|n^2(z) - \cos^2 \alpha|}{\sin^2 \alpha} \right]^{1/4}$. Первый поправочный член ρ имеет вид:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\frac{f'''}{(f'')^2} \cdot \frac{B'}{B} + \frac{1}{4} \frac{f^{IV}}{(f'')^2} - \frac{5}{12} \frac{(f''')^2}{(f'')^3} + \frac{f'''}{(f'')^2} \cdot \frac{g'}{g} - \frac{1}{f''} \frac{(gB)''}{gB} \right]. \quad (12)$$

Условия, накладываемые на r и на форму импульса требованием $\rho \ll 1$,

будут рассмотрены ниже*. Ограничимся пока теми значениями t , при которых $\cos^2 \alpha(t) < n^2(z)$. Тогда, с учетом (4), (5), $G_1(1 + V_2)$ и, соответственно, все поле (11) можно разбить на четыре части:

$$\Psi(r, z, t) = \sum_{k=1}^4 \Psi_k(r, z, t) = D(r, z, t) \sum_{l=1}^{\infty} g(\omega_{sl}) [e^{i\gamma_1(l-x)} + e^{i\gamma_2(l-x) - i\pi\delta_1} + e^{i\gamma_3(l-x) - i\pi\delta_2} + e^{i\gamma_4(l-x) - i\pi(\delta_1 + \delta_2)}] + k. c. \quad (13)$$

Здесь $D(r, z, t)$ — множитель, стоящий в (11) перед знаком суммы,

$$\gamma_1 = \beta(t) \left[\tau + \frac{\mu(z)}{c_0} \right], \quad \gamma_2 = \beta(t) \left[\tau + \frac{2\mu(z_{1k}) - \mu(z)}{c_0} \right], \quad \gamma_3 = \beta(t) \left[\tau + \frac{-2\mu(z_{2k}) + \mu(z)}{c_0} \right],$$

$$\gamma_4 = \beta(t) \left[\tau + \frac{2\mu(z_{1k}) - 2\mu(z_{2k}) - \mu(z)}{c_0} \right], \quad \tau = \frac{r}{c_0} \cos \alpha(t) - t, \quad \beta(t) = \frac{\pi c_0}{Q(\alpha)} = \frac{\omega_{s_1}}{1-x}.$$

Зададимся теперь конкретной формой импульса.

С целью выяснения соответствия между лучевым и волновым подходами рассмотрим наиболее простой вид импульса: δ -функцию. Ее спектральная функция — константа. Получающиеся в (13) суммы синусов и косинусов будут сходиться, если придать волновому числу малую мнимую часть, которую затем можно устремить к нулю. В результате получим, например, для того отрезка времени и для той ветви $U_l(\omega)$, на которой $n^2(z_1) < \cos^2 \alpha(t)$, $n^2(z_2) < \cos^2 \alpha(t)$:

$$\Psi(r, z, t) = D(r, z, t) \left[\frac{(-1)^{n_1}}{V \frac{1}{2}} \delta(\gamma_1 + 2\pi n_1) + \frac{1}{\sin \frac{\gamma_2}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma_3}{2}} + \frac{(-1)^{n_4}}{V \frac{1}{2}} \delta(\gamma_4 + 2\pi n_4) \right], \quad n_k = 1, 2, \dots$$

Обратимся к лучевой картине (см. фиг. 1). Луч, вышедший из излучателя под углом α , завернув один раз выше и один раз ниже оси канала, вернется на горизонт излучателя через время $\Delta t(\alpha)$ на расстоянии $\Delta r(\alpha)$. Можно показать, что

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} (c_0 \Delta t - \Delta r \cdot \cos \alpha), \quad R(\alpha) = \frac{\Delta r}{2 \cos \alpha}. \quad (14)$$

Тогда уравнение $\gamma_k = -2\pi n_k$ определяет моменты прихода импульсов по различным возможным путям, состоящим из целого числа n_k таких циклов плюс участки L_k , изображенные в правой части фиг. 1. При этом системы 1 и 4 определяют лучи, завернувшие в среде четное число раз, а системы 2 и 3 — нечетное число. Таким образом, вычисление при помощи нормальных волн привело к обычной картине прихода импульсов

* Сделаем замечание в оправдание выбранного нами представления морского дна в виде абсолютно отражающей поверхности. В нашем приближении поле, соответствующее той ветви $U_l(\omega)$, где $\cos^2 \alpha(t) > n^2(z_2)$ (ветвь справа от максимума на фиг. 2), вообще не зависит от характера дна. Что касается области, где $\cos^2 \alpha(t) < n^2(z_2)$ (ветвь слева от максимума на фиг. 2), то можно отметить следующее. Пусть в реальном случае имеет место скачок $c(z)$ на границе дно — вода. Тогда можно ожидать (см., например, [3, фиг. 2]), что групповые скорости такого волновода будут совпадать с $U_l(\omega)$ для случая абсолютно отражающего дна и на некотором участке этой ветви вплоть до минимума, который изображен на фиг. 2 схематически пунктиром. Следовательно, поля таких волноводов будут различаться только в поздние моменты времени на весьма низких частотах.

по лучам. Однако импульсы, прошедшие через точку заворота, оказываются искаженными из-за расфазировки, которую вносит добавление $-\frac{\pi}{2}$ в фазу коэффициента отражения (5) монохроматической волны. Второе прохождение через точку заворота возвращает импульс к прежнему виду, но с обратным знаком. Величина $\beta(t)$ определяет частоту прихода лучей. В нашем случае $\beta(t) = 2\omega_{s1}$. Следовательно, один период первой нормальной волны соответствует приходу двух лучей одной из систем, т. е. восьми лучей всех четырех систем.

Аналогичные вычисления и рассуждения могут быть проведены для других ветвей $U_l(\omega)$. При этом наряду с лучами, завернувшимися в среде, появляются лучи, отраженные от границ. Обратимся к случаю $n^2(z) < \cos^2\alpha(t)$, т. е. к времени, когда по лучевой теории на расстояние r приходят лучи, загибающиеся на уровне, который лежит ближе к минимуму $s(z)$, чем уровень z приемника. После вычисления получим из (11) естественный результат — быстрое (по экспоненте) убывание поля по мере увеличения $\cos^2\alpha(t)$.

Возьмем теперь импульс, имеющий отличную от нуля длительность:

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-St}, & t > 0; \end{cases} \quad g(\omega) = \frac{1}{S-i\omega}. \quad (15)$$

Суммируя ряд (13), получаем для Ψ_1 и Ψ_4 выражения:

$$\Psi_k(r, z, t) = D(r, z, t) \frac{(-1)^{n_k \cdot \pi}}{\beta(t) \operatorname{ch} \frac{\pi S}{\beta(t)}} e^{-\frac{S}{\beta(t)} [\pi - \gamma'_k(t)]}, \quad k=1, 4,$$

где $\gamma'_k = \gamma_k(t) + 2\pi n_k$, $0 < \gamma'_k < 2\pi$. Ψ_1, Ψ_4 являются, как и в первом случае, квазипериодическими по t функциями и могут быть истолкованы как ряд последовательно приходящих по лучам импульсов, каждый из которых искажен только наложением хвостов предыдущих. Ψ_2 и Ψ_3 дают последовательность импульсов, пришедших после нечетного числа заворотов в волноводе и поэтому дополнительно искаженных из-за расфазировки. График одного из периодов $\Psi_2(t)$, найденный численным суммированием для частного случая $s(z)$ в виде (7) ($a_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$), представлен на фиг. 3 вместе с $\Psi_1(t)$. Графики совмещены по оси времени для удобства сравнения их.

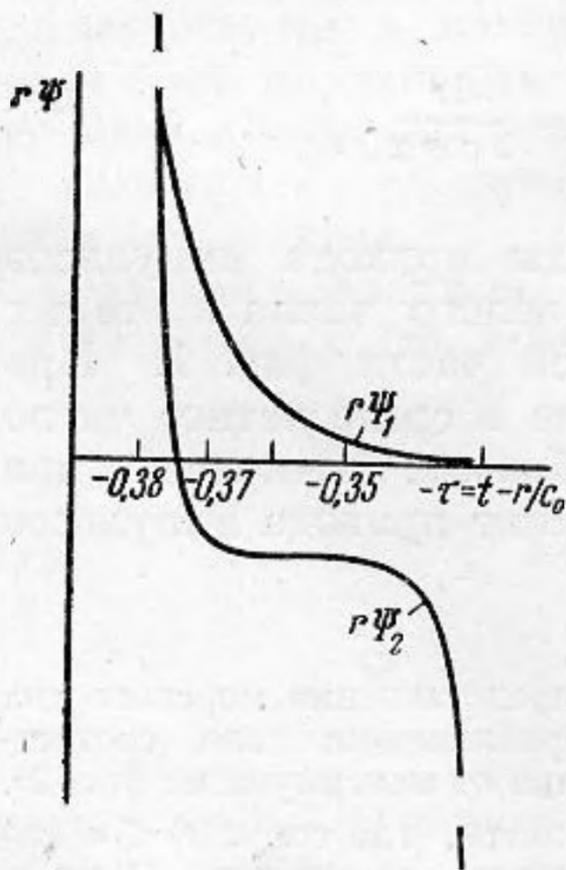
Пользуясь (14) и формулами геометрической акустики, можно привести Ψ_1 к виду:

$$\Psi_1(r, z, t) = \frac{|V f(\alpha, z)|}{r} \cdot \frac{(-1)^{n_1+1}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi S}{\beta(t)}} \cdot e^{-\frac{S}{\beta(t)} [\pi - \gamma'_1(t)]}, \quad (16)$$

где $f(\alpha, z) = \frac{r \cdot n(z)}{\frac{dr}{d\alpha} \sqrt{n^2(z) - \cos^2\alpha}}$ — геометри-

ский фактор фокусировки. $\Psi_4(r, z, t)$ представляется аналогично. Из (16) видно, что

амплитуда Ψ_1 и Ψ_4 для всех t близка к максимальному значению отдельного импульса, пришедшего в точку (r, z) по лучу. Следовательно, при излучении импульсов вида (15) не происходит возрастания поля за счет



Фиг. 3

наложения лучей. Поле убывает пропорционально $\frac{1}{r}$ при всех значениях r . Область цилиндрического закона спадания отсутствует при любом параметре S . Можно показать, что аналогичный результат для закона спадания имеет место, например, для импульса вида $p(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{t^2 + \delta^2}$.

Рассмотрим поправочный член (12). Его первые три слагаемых зависят только от формы $s(z)$ и имеют порядок $\frac{\Delta r(\alpha)}{r}$ при $\cos^2 \alpha(t) > n^2(z_i)$, $i = 1, 2$ и $\frac{z_1 + z_2}{r}$ при $\cos^2 \alpha(t) \ll n^2(z_i)$. Они малы на больших расстояниях.

Последние два члена содержат $g(\omega)$ и накладывают ограничения на форму импульса. Эти члены малы для широкополосных импульсов, подобных рассмотренным. Все члены обращаются в бесконечность при $f_l''(\omega) = -i \frac{r}{U_l^2(\omega)} U_l'(\omega) = 0$, т. е. полученные результаты несправедливы в области экстремума $U_l(\omega)$.

Перейдем к случаю распространения узкополосного импульса, имеющего вид:

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > b \\ e^{-i\omega_0 t}, & 0 \leq t \leq b \end{cases} \quad (17)$$

В этом случае применимым методом приближенного вычисления интеграла (8) является разложение входящих в него функций в ряд вокруг ω_0 . В частности;

$$f_l(\omega) = f_l(\omega_0) + i\tau_l(\omega - \omega_0) + i \frac{A_l}{2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots,$$

где $\tau_l = \frac{r}{U_l(\omega_0)} - t$, $A_l = -\frac{r U_l'(\omega_0)}{U_l^2(\omega_0)}$. В результате вычислений в предположении

$$q_l = \frac{\omega_0 |A_l|}{b} \gg 1 \quad (18)$$

получаем поле тех L нормальных волн, для которых критическая частота волновода меньше ω_0 , в виде

$$\sum_{l=1}^L \Psi_l(r, z, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=1}^L B_l(\omega_0) \cdot e^{i[\frac{r}{c_0} \cos \alpha_l(\omega_0) - t]} \omega_0 + i \frac{\pi}{4} \times \\ \times \left[F^* \left(\frac{\tau_l + b}{\sqrt{2A_l}} \right) - F^* \left(\frac{\tau_l}{\sqrt{2A_l}} \right) \right] + k. c., \quad (19)$$

где $F^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-it^2} dt$ — интеграл Френеля.

Исследуем (19). Пусть

$$\frac{b}{\sqrt{2A_l}} = \sqrt{\frac{\pi N}{q_l}} \gg 1, \quad \text{где } N = \frac{b\omega_0}{2\pi}, \quad (20)$$

что возможно при $N \gg 1$. Тогда основная часть поля нормальной волны с $l < L$ представляет собой размытый по краям первоначальный импульс той же длины и частоты с амплитудой, пропорциональной $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Поле остальных нормальных волн можно пренебречь, так как оно пропорционально $\frac{1}{r} g(\omega_{sl})$, причем $\omega_{sl} > \omega_0$. Можно показать, что основные части полей отдельных нормальных волн с не слишком большими номерами разделены во времени.

Действительно, момент прихода центра этой основной части для нормальной волны номера l равен $t = \frac{r}{U_l(\omega_0)}$. Тогда условие того, чтобы время между приходами центров полей нормальных волн с номерами l и $l+1$ было больше длины импульса b , имеет вид: $\frac{r}{c_0^2} \left| \frac{\Delta U_l}{\Delta l} \right|_{\omega_0} > b$. Заменяя приближенно конечные разности на производные и используя (3), получаем $\frac{r\omega_0}{(l-x)bc_0^2} \left| \frac{dU_l}{d\omega} \right|_{\omega_0} > 1$, что с точностью до $(l-x)$ совпадает с требованием $q_l > 1$. Как будет видно ниже, амплитуда поля убывает с номером l . Таким образом, учет наложения нормальных волн не может изменить зависимости $\Psi(r, z, t)$ (во всяком случае в его максимальной части) от расстояния.

На больших расстояниях (при $\sqrt{\frac{\pi N}{q_l}} < 1$) импульс номера l начинает расплываться, а амплитуда его центра (при $t = \frac{r}{U_l(\omega_0)}$) уменьшается. Воспользовавшись разложением $F(x)$ вблизи нуля, найдем поле l -й нормальной волны в центре. Оно имеет вид:

$$\Psi_l \left(r, z, \frac{r}{U_l(\omega_0)} \right) = \frac{V f(\alpha, z)}{r} \cdot \frac{N}{l-x} (1 + V_2) \cdot G_1 \cdot e^{i \left[\frac{r}{c_0} \cos \alpha_l(\omega_0) - t \right] \cdot \omega_0 + k \cdot c} \quad (21)$$

Амплитуда этого выражения пропорциональна $\frac{1}{r}$ и отличается от амплитуды единичного пришедшего по лучу импульса только множителем $\frac{N}{l-x}$.

Проанализируем формулы (19), (21) и границы их применимости с точки зрения лучевой картины. Для простоты рассмотрим частный случай (7), $\cos^2 \alpha_l(\omega_0) > n^2(z_i)$, $i = 1, 2$. Обозначим через r_1, r_2 расстояния, соответствующие границам применимости этих формул. Они определяются из уравнений $q_l(r_1) = 1$, $\frac{q_l(r_2)}{\pi N} = 1$. В нашем случае имеем $U_l(\omega) = c_0 \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 \alpha_l(\omega) \right)$, и уравнения для r_1, r_2 принимают вид:

$$\frac{r_1 \cdot \sin^2 \alpha_l(\omega_0)}{9 c_0 b} = 1, \quad (22)$$

$$\frac{r_2 \cdot \sin^2 \alpha_l(\omega_0)}{9 \pi c_0 b N} = 1. \quad (23)$$

В лучевой теории граница r_0 зоны цилиндрического спадания, получающаяся, согласно [1, 2], для волновода с поглощающей нижней границей, определяется из уравнения

$$\frac{r_0 \sin^2 \alpha_{rp}}{9 c_0 b} = 1, \quad (24)$$

где α_{gr} — угол скольжения луча, касающегося границы. Здесь r_0 — расстояние, на котором полное затягивание импульса за счет распространения становится равным его длине.

При $r < r_0$ лучевая теория дает $\Psi \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$ из-за увеличения числа лучей, приходящих за время b , при условии их энергетического суммирования. По аналогии с (24), смысл (22) состоит в том, что время b становится равным разности времен прихода всех лучей, кончая теми, что приходят по оси канала, и начиная от лучей, составляющих l -ю нормальную волну. Смысл последнего выражения станет ясным ниже.

Отметим, что для рассматриваемого волновода с отражающими границами полное время затягивания импульса становится равным бесконечности из-за наличия равной нулю групповой скорости. Поэтому в лучевой теории также, вероятно, следует пользоваться условием (22). Из сказанного видно, что (19) применимо за пределами области цилиндрического закона, даваемой лучевой теорией.

Для выяснения смысла наличия закона $\frac{1}{\sqrt{r}}$ в области между r_1 и r_2 учтем в лучевой трактовке задачи интерференцию лучей. Рассмотрим два луча, приходящих в точку (r, z) , пути которых отличаются на один цикл. Из них последним приходит луч, имеющий на цикл больше. При наложении они усиливаются, если разность фаз между ними (для частоты ω_0) близка к $-2\pi l$ (при $1 \leq l < N$). Из этого числа $-2\pi(l - \frac{1}{2})$ набегаем при распространении импульса, и $-\pi$ появляется при двукратном завороте луча. Таким образом, конструктивно интерферирующие, как их иногда называют, лучи приходят с опозданием относительно друг друга на нечетное число полуциклов. Можно говорить, что все лучи, приходящие с разностью фаз в пределах от $-2\pi(l - \frac{1}{2})$ до $-2\pi(l + \frac{1}{2})$, образуют собою l -ю нормальную волну. Чтобы некоторое число лучей усилило друг друга в некоторой своей части, начало импульса последнего из них должно лечь на конец первого. Таких лучей может существовать только $\frac{N}{l - \frac{1}{2}}$. Таким образом, максимальное усиление поля по сравнению со

сферическим законом спадания должно быть равно $\frac{N}{l - \frac{1}{2}}$, причем оно

возможно лишь, когда все слагающиеся лучи приходят с достаточной точностью в фазе. Это объясняет наличие этого фактора в (21) и показывает, что участок замедленного убывания поля между r_1 и r_2 имеет место за счет перехода от энергетического суммирования к амплитудному.

Для подтверждения сказанного оценим число лучей, составляющих l -ю нормальную волну. Оно равно $\frac{a_1 a_2 \cdot r}{(a_1 + a_2)(l - \frac{1}{2})a_l}$. На расстоянии r_1

в нормальной волне номера l имеется $\frac{N}{(l - \frac{1}{2})^2}$ лучей; на расстоянии

r_2 — уже $\frac{N^2}{(l - \frac{1}{2})^2}$, из которых любые $\frac{N}{(l - \frac{1}{2})}$ накладываются друг на

друга. В центральной части сдвиги фаз между ними близки к $-2\pi l$, и возможно их амплитудное суммирование.

Вернемся к широкополосному импульсу вида (15). Как уже указывалось выше, в этом случае область цилиндрического закона отсутствует.