АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ УГЛЕ ПАДЕНИЯ

В. В. Тютекин

Рассматривается дифракция плоской звуковой волны на бесконечной цилиндрической полости при произвольном угле падения волны к оси полости. Получены решения для скалярного и векторного потенциалов в виде суперпозиции цилиндрических волн различных порядков. Подробно рассмотрена зависимость амплитуды нулевой волны от угла падения и частоты.

В работе [1] был рассмотрен случай рассеяния плоской звуковой волны цилиндрической полостью в изотропной упругой среде при перпендикулярном падении волны к оси полости. Было показано, что при малом модуле сдвига возможен резонанс полости, который расположен для нулевой цилиндрической волны в области частот, определяемых соотношением $0<k_l a \lesssim 2$, где k_l — волновое число сдвиговых волн, a — радиус полости. В настоящей работе рассматривается та же задача, но для произвольного угла падения волны на полость.

Пусть в однородной среде с плотностью ρ и упругими коэффициентами Лямэ λ и μ на бесконечную цилиндрическую полость радиуса a падает плоская звуковая волна под углом α к оси цилиндра (ось z).

$$\varphi_{\text{пад}} = e^{-i(\omega t - k_l \cos\alpha \cdot z + k_l \sin\alpha \cdot y)}. \tag{1}$$

Для простоты мы полагаем, что амплитуда падающей волны равна единице, и волновой вектор $\mathbf{k}_l$ параллелен плоскости z_y. Будем решать задачу, как обычно, в цилиндрической системе координат r, θ, z. Поскольку $y = r\cos\theta$, то падающую волну можно разложить на цилиндрические волны *.

$$\varphi_{\text{пад}} = e^{ik_1 z} e^{-ipy} = e^{ik_1 z} e^{-ipr\cos\theta} = e^{ik_1 z} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n J_n(pr) \cos n\theta. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: $k_1 = k_l \cos\alpha$, $p = \sqrt{k_l^2 - k_1^2} = k_l \sin\alpha$; $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$. Известно, что смещение точек среды $\mathbf{u}$ можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{пад}} + \mathbf{u}_{\text{отр}} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{3}$$

$\varphi = \varphi_{\text{пад}} + \varphi_{\text{отр}}$—суммарный скалярный потенциал падающей и отраженной волн, а $\mathbf{\Pi}$ — векторный потенциал отраженной волны (в падающей волне вектор $\mathbf{\Pi}$ равен нулю). Скалярный потенциал $\varphi_{\text{отр}}$ должен удовлетворять скалярному волновому уравнению

$$\Delta\varphi_{\text{отр}} + k_l^2 \varphi_{\text{отр}} = 0.$$

Поэтому будем искать его в виде суммы расходящихся цилиндрических

* В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем.

волн, сохраняя зависимость от координаты z, как и у $\varphi_{\text{пад}}$:

$$\varphi_{\text{отр}} = l^{ik_1 z} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_n a_n H_n(pr) \cos n\theta, \tag{4}$$

где $H_n(pr) \equiv H_n^{(1)}(pr)$ — функция Ганкеля 1-го рода порядка n (индекс $H^{(1)}$ для простоты записи опущен), a_n — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Перейдем к определению векторного потенциала $\mathbf{\Pi}$. В случае нормального падения волны на полость [1], когда зависимость от координаты z отсутствовала, в отраженной волне была отлична от нуля только одна компонента векторного потенциала Π_z, последняя удовлетворяла скалярному волновому уравнению $\Delta\Pi_z + k_l^2\Pi_z = 0$. В случае произвольного падения волны, когда рассеянное поле зависит от всех трех координат, ни одна из компонент потенциала $\mathbf{\Pi}$ не будет равна нулю. Последний должен удовлетворять в этом случае векторному волновому уравнению:

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + k_l^2\mathbf{\Pi} = 0. \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = 0. \tag{5'}$$

Отметим здесь, что векторное волновое уравнение распадается на три независимых скалярных волновых уравнения относительно каждой из трех составляющих вектора $\mathbf{\Pi}$ только в декартовой системе координат. Поэтому в случае любой другой системы координат приходится применять искусственные приемы решения уравнения (5). Так, для рассматриваемого случая цилиндрической системы координат будем искать это решение в виде суммы двух векторных функций $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ [2]:

$$\mathbf{\Pi} = \Pi_r\mathbf{r} + \Pi_\theta\boldsymbol{\theta} + \Pi_z\mathbf{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^{*}\mathbf{M}_n + c_n^{*}\mathbf{N}_n), \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\theta}$ и $\mathbf{z}$ — единичные векторы соответствующих направлений, b_n^{*} и c_n^{*} — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий, а векторы $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$ вводятся следующим образом. Пусть некоторые функции ψ_n удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta\psi_n + k_l^2\psi_n = 0, \tag{7}$$

а вектор $\mathbf{a}$ есть единичный вектор постоянного направления. Тогда, как легко убедиться непосредственной подстановкой, векторы

$$\mathbf{M}_n = \operatorname{rot}(\psi_n \cdot \mathbf{a}) \text{ и } \mathbf{N}_n = \frac{1}{k_t}\operatorname{rot}\mathbf{M}_n \tag{8}$$

удовлетворяют векторному волновому уравнению (5) и уравнению (5').

Возьмем в качестве постоянного вектора единичный вектор $\mathbf{z}$, а в качестве решения уравнения (7) функции

$$\psi_{n1} = H_n(qr)\cos n\theta e^{ik_1 z}, \quad \psi_{n2} = H_n(qr)\sin\theta l^{ik_1 z}, \tag{9}$$

где $q = \sqrt{k_l^2 - k^2}$.

Тогда из (8) получим:

$$m_{1n} = e^{-ik_1 z}\mathbf{M}_{1n} = -\frac{n}{r}H_n(qr)\sin n\theta\mathbf{r} - \frac{dH_n(qr)}{dr}\cos n\theta\cdot\boldsymbol{\theta},$$

$$m_{2n} = e^{-ik_1 z}\mathbf{M}_{2n} = \frac{n}{r}H_n(qr)\cos n\theta\mathbf{r} - \frac{dH_n(qr)}{dr}\sin n\theta\cdot\boldsymbol{\theta},$$

$$\boldsymbol{n}_{1n} = e^{-ik_1 z}\mathbf{N}_{1n} = \frac{ik_1}{k_l}\frac{dH_n(qr)}{dr}\cos n\theta\mathbf{r} - \frac{ik_1 n}{k_l r}H_n(qr)\sin n\theta\cdot\boldsymbol{\theta} + \frac{q^2}{k_l}H_n(qr)\cos n\theta\cdot\boldsymbol{z},$$

$$\boldsymbol{n}_{2n} = e^{-ik_1 z}\mathbf{N}_{2n} = \frac{ik_1}{k_l}\frac{dH_n(qr)}{dr}\sin n\theta\mathbf{r} + \frac{ik_1 n}{k_l r}H_n(qr)\cos n\theta\cdot\boldsymbol{\theta} + \frac{q^2}{k_l}H_n(qr)\sin n\theta\cdot\boldsymbol{z},$$

Возьмем $\mathbf{\Pi}$ в виде следующей линейной комбинации:

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\vec{\prod}_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n'' M_{1n} + c_n'' N_{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n'' m_{1n} + c_n'' n_{2n})\,e^{ik_1 z}, \qquad (10)$$

откуда для компонент векторов $\mathbf{\Pi}_n$, опуская множитель $e^{ik_1 z}$, получим

$$\Pi_{rn} = \left[-b_n\frac{n}{r}H_n(qr) + c_n\frac{ik_1}{k_l}\frac{dH_n(qr)}{dr}\right]\sin n\theta\cdot(-i)^n\varepsilon_n,$$

$$\Pi_{\theta n} = \left[-b_n\frac{dH_n(qr)}{dr} + c_n\frac{ik_1 n}{k_l r}H_n(qr)\right]\cos n\theta\,(-i)^n\varepsilon_n, \qquad (10')$$

$$\Pi_{zn} = c_n\frac{q^2}{k_l}H_n(qr)\sin n\theta\,(-i)^n\varepsilon_n.$$

Здесь $b_n(-i)^n\varepsilon_n = b_n''$ и $c_n(-i)^n\varepsilon_n = c_n''$. Таким образом, мы нашли вид решения (10) векторного волнового уравнения (5). Для определения неизвестных величин a_n, b_n и c_n, входящих в выражения для $\varphi_{\text{отр}}$ и $\mathbf{\Pi}$, подставим последние в граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю нормального $(\widehat{rr})$ и двух тангенциальных $(\widehat{r\theta}$ и $\widehat{rz})$ напряжений на стенке полости:

$$\widehat{rr} = 0,\ \widehat{r\theta} = 0,\ \widehat{rz} = 0 \text{ при } r = a. \qquad (11)$$

Последние выражаются известным образом через величины скалярного и векторного потенциалов и упругие постоянные среды:

$$\widehat{rr} = -\lambda k_l^2\varphi + 2\mu\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Pi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Pi_\theta}{\partial z\partial r}\right],$$

$$\widehat{r\theta} = \mu\left[\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_\theta}{\partial z\partial\theta} + \frac{\partial^2\Pi_r}{\partial z\partial r} - \frac{\partial^2\Pi_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z}{\partial r}\right]$$

$$\widehat{rz} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial r} + \frac{\partial^2\Pi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Pi_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_r}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Pi_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial^2\Pi_\theta}{\partial z^2}\right].$$

Подставив значение φ из (1) и (4) и значения Π_r, Π_θ и Π_z из (10) в (12) и учитывая (11), получим систему трех линейных уравнений для определения величин a_n, b_n, c_n:

$$a_n\left[\frac{d^2H_n(pa)}{da^2} - \frac{\delta k_l^2}{2}H_n(pa)\right] + b_n ik_1\frac{d^2H_n(qa)}{da^2} +$$

$$+ c_n\frac{n}{a}k_l\left[\frac{dH_n(qa)}{da} - \frac{1}{a}H_n(qa)\right] = -\left[\frac{d^2J_n(pa)}{da^2} - \frac{\delta k_l^2}{2}J_n(pa)\right], \qquad (13)$$

$$a_n\frac{n}{a}\left[\frac{dH_n(pa)}{da} - \frac{1}{a}H_n(pa)\right] + b_n\frac{n}{a}ik_1\left[\frac{dH_n(qa)}{da} - \frac{1}{a}H_n(qa)\right] +$$

$$+ c_n k_l\left[\frac{d^2H_n(qa)}{da^2} + \frac{q^2}{2}H_n(qa)\right] = -\frac{n}{a}\left[\frac{dJ_n(pa)}{da} - \frac{1}{a}J_n(pa)\right],$$

$$a_n 2ik_1\frac{dH_n(pa)}{da} + b_n\left[(q^2 - k_1^2)\frac{dH_n(qa)}{da} - q\frac{n(n-1)}{a^2}H_{n-1}(qa)\right] +$$

$$+ c_n\frac{ik_i}{k_l a}n\left(\frac{1}{a^2} + k_l^2\right)H_n(qa) = -2ik_1\frac{dJ_n(pa)}{da}.$$

Для упрощения формы записи здесь введено обозначение $d/da \equiv (d/dr)_{r=a}$. При конкретных расчетах вместо производных от цилиндрических функций нужно подставить их значения:

$$\frac{dH_n(ka)}{da} = -\frac{n}{a} H_n(ka) + kH_{n-1}(ka),$$

$$\frac{dH_n(ka)}{da^2} = -\frac{k}{a} H_{n-1}(ka) + \left[\frac{n(n+1)}{a^2} - k^2\right] H_n(ka). \qquad (14)$$

Эти же формулы справедливы и для функций $J_n(ka)$. Величины a_n, b_n и c_n определяются из (13) путем соотношений:

$$a_n = \Delta_n / \Delta_{an}, \; b_n = \Delta_n / \Delta_{bn}, \; c_n = \Delta_n / \Delta_{cn},$$

где Δ_n — детерминант системы (13), а Δ_{an}, Δ_{bn}, Δ_{cn} — детерминанты, получающиеся путем замены в Δ_n соответствующих столбцов столбцом, составленным из правых частей уравнений системы (13). Таким образом, задача о произвольном падении звуковой волны на цилиндрическую полость бесконечной длины решена полностью.

Интересным и значительным фактом является то, что если величину k_1, входящую в Δ_n, заменить некоторой неизвестной величиной $\varkappa_n$, то уравнение $\Delta_n(\varkappa_n) = 0$ оказывается характеристическим уравнением для определения собственных значений волновых чисел $\varkappa_n$ нормальных волн, могущих распространяться в окружающей среде вдоль оси полости. Отсюда можно сделать вывод, что если проекция волнового вектора падающей волны на ось полости совпадает с одним из собственных значений волнового числа $\varkappa_n$, т. е. $k_1 \equiv k_l \cos\alpha = \varkappa_n$, то в отраженном поле наиболее всего будут представлены цилиндрические волны тех номеров n, которые как раз соответствуют этим значениям $\varkappa_n$, так как в этом случае коэффициенты a_n, b_n и c_n обращаются (без учета потерь) в бесконечность. Следовательно, можно сказать, что в этом случае наблюдается явление так называемого пространственного резонанса [3].

Нужно отметить, однако, что поскольку в уравнение $\Delta_n(\varkappa_n) = 0$ входят функции Ганкеля, являющиеся в общем случае комплексными величинами, то и волновые числа $\varkappa_n$ также будут комплексными (даже если в среде нет потерь), происходит это потому, что имеется постоянный отток энергии от стенок полости за счет излучения, имеющего место при $\varkappa_n < k_l$, k_t. Поэтому, в общем случае величины $\varkappa_n$ никогда не будут в точности равны k_1; если они, однако, будут близкими величинами, то резонанс соответствующей формы все же будет проявляться, так как в этом случае величина Δ_n будет близка к нулю и коэффициенты a_n, b_n и c_n будут принимать большие значения.

Выражения, полученные для коэффициентов a_n, b_n и c_n являются весьма сложными и громоздкими, хотя последние могут быть рассчитаны совершенно точно. Поэтому в качестве примера, также как и в [1], мы приведем расчет для случая $n = 0$, т. е. рассмотрим только чисто цилиндрическую волну, оставляя в стороне вопрос о мультипольном излучении полости. Подставляя в (13) значение $n = 0$, учитывая (14) и вводя обозначения

$$\varphi(u) = u\frac{H_0(u)}{H_1(u)}, \; \psi(u) = u\frac{J_0(u)}{J_1(u)}, \; \beta = \frac{k_t^2}{2k_l^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu},$$

где u — некоторый аргумент, получим выражения для коэффициентов a_0, b_0 и c_0:

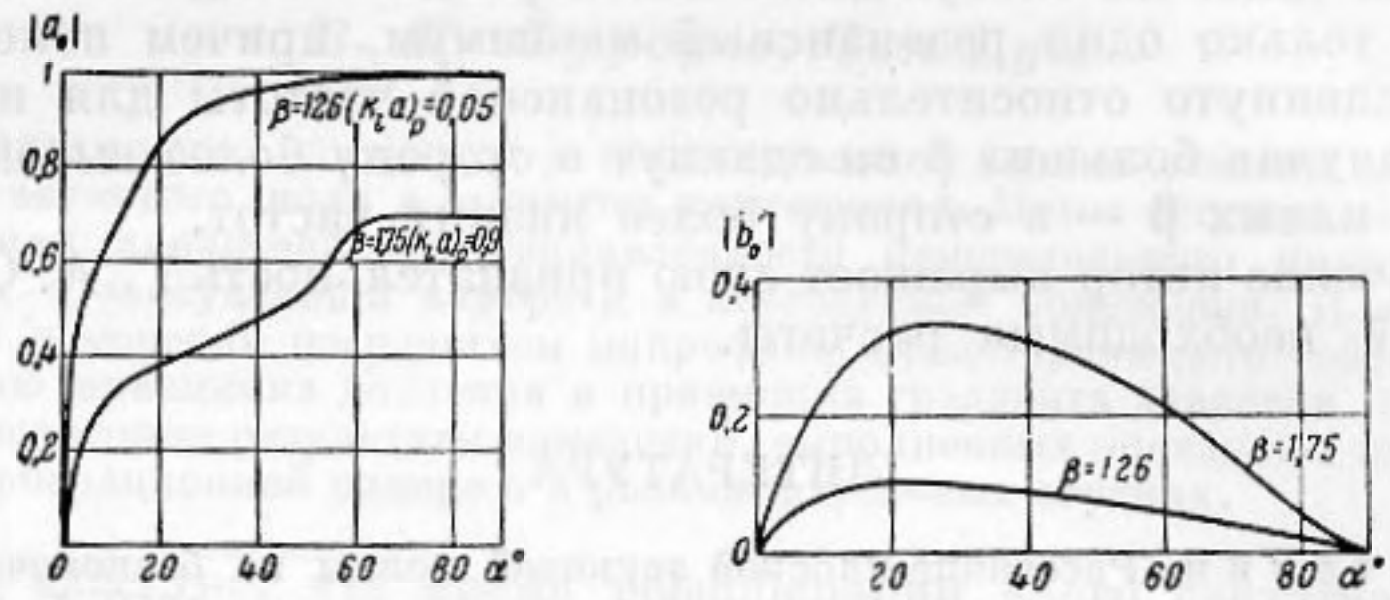
$$a_0 = -\frac{J_1(pa)}{H_1(pa)} \cdot \frac{\sin^2\alpha\,[\beta - \cos^2\alpha \cdot \varphi(qa)] - (\beta - \cos^2\alpha)^2 \psi(pa)}{\sin^2\alpha\,[\beta - \cos^2\alpha \cdot \varphi(qa)] - (\beta - \cos^2\alpha)^2 \varphi(pa)},$$

$$b_0 = i\frac{J_1(pa)}{2H_1(qa)}\cdot\frac{\sin 2\alpha\,(\beta-\cos^2\alpha)\,[\varphi(pa)-\psi(pa)]}{k_l\sqrt{2\beta-\cos^2\alpha}\,\{\sin^2\alpha\,[\beta-\cos^2\alpha\varphi(qa)]-(\beta-\cos^2\alpha)^2\varphi(pa)\}}, \qquad (15)$$

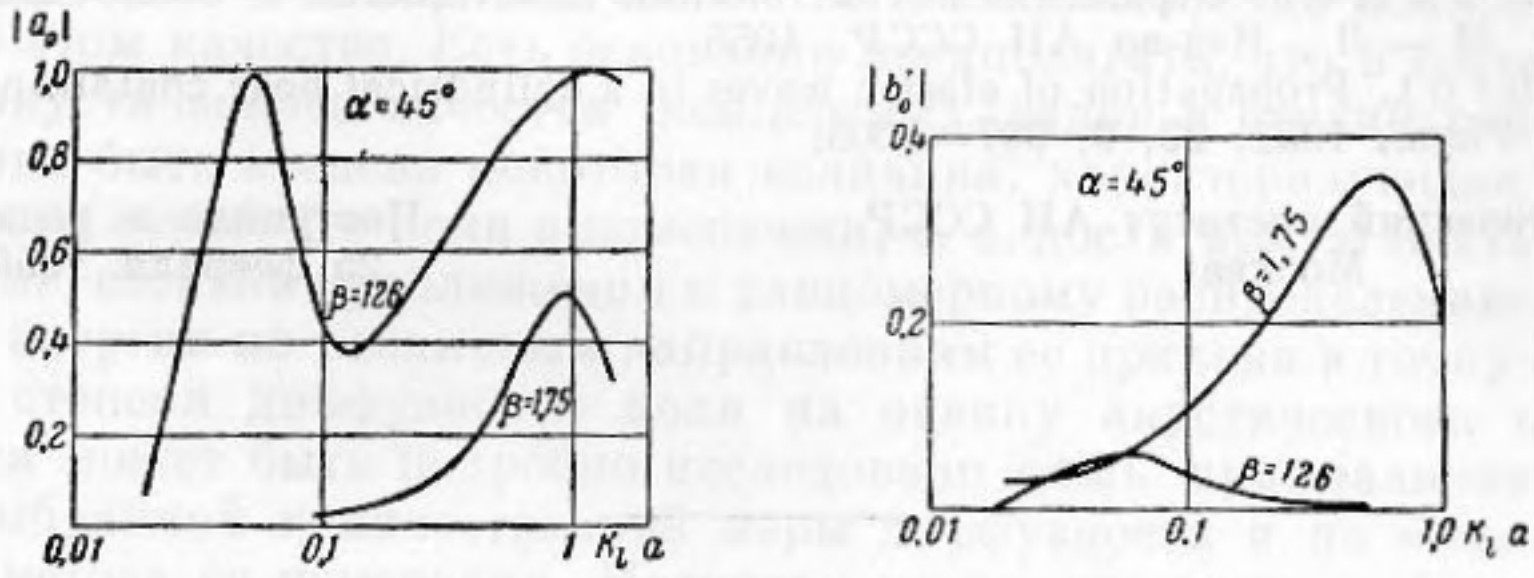
$$c_0 = 0.$$

В новых обозначениях величины p и q записываются так: $p = k_l \sin\alpha$; $q = k_l\sqrt{2\beta-\cos^2\alpha}$. Легко видеть, что при $\alpha = \pi/2$ (перпендикулярное падение) (15) переходит в соответствующие формулы работы [1].

Рассмотрим зависимость коэффициентов a_0 и b_0 ($c_0 = 0$), определяющих отраженную волну нулевого порядка от значения угла падения плоской волны относительно оси цилиндрической полости.



а Фиг. 1 *б*



а Фиг. 2 *б*

На фиг. 1, *а* представлены значения величины $|a_0|$, рассчитанные по формуле (15) для различных значений угла α; при этом в качестве параметра взяты величины $k_l a$ и β, соответствующие резонансу полости при перпендикулярном падении [1]. Величина $|a_0|$ рассчитана для двух пар параметров: $(k_l a)_p = 0{,}05$ $\beta = 126$ и $k_l a = 0{,}9$, $\beta = 1{,}75$. Из фиг. 1, *а* видно, что величина a_0 с изменением угла существенно отличается от своего резонансного значения, равного единице, только при $\alpha > 45°$, причем при $\alpha = 0$ величина $a_0 = 0$. Это объясняется тем, что при $\alpha = 0$ волна нулевого порядка с волновым числом k_l существовать не может; вдоль оси полости в этом случае распространяется осесимметричная волна с некоторым волновым числом $\varkappa_0$, отличным от k_l [4]. Поскольку наличие полости в среде несколько «смягчает» последнюю, то выполняется соотношение $\varkappa_0 > k_l$ (соответственно, скорость распространения волны вдоль оси полости меньше скорости продольных волн в сплошной среде). В этом случае, как это следует из известного принципа Рэлея, излучения полостью продольных волн в среду не происходит.

На фиг. 1, *б* представлена зависимость коэффициента $|b_0'| = \left|\frac{b_0}{a}\right|$ от угла падения. При $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$ этот коэффициент обращается в нуль, что соответствует отсутствию сдвиговых волн при нормальном падении волны, а также при распространении ее вдоль оси полости. При углах падения 25—30° наблюдается максимум излучения, причем для случая

малых значений β (например, металл) коэффициент $|b_0'|$ получается в несколько раз больше, чем в случае больших значений β (например, резина)

На фиг. 2,*а* и 2,*б* представлена зависимость коэффициентов $|a_0|$ и $|b_0|$ соответственно от частоты при угле падения $\alpha = 45°$. Как видно из фиг. 2,*а*, зависимость для величины $|a_0|$ при больших значениях β мало чем отличается от таковой для случая нормального падения [1] (отличие заключается практически только в величине провала между горбами). Для малых β величина максимума в случае нормального падения несколько больше.

Из фиг. 2,*б* видно, что кроме резонансного возбуждения продольных волн имеется такое же возбуждение и поперечных волн, но в этом случае получается только один резонансный максимум, причем положение его несколько сдвинуто относительно резонансной частоты для продольных волн. Для случая больших β он сдвинут в сторону более высоких частот, для случая малых β — в сторону более низких частот.

В заключение автор выражает свою признательность Г. А. Смирновой, проделавшей необходимые расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Тютекин. Рассеяние плоской звуковой волны на бесконечной цилиндрической полости в изотропной упругой среде Акуст ж., 1959, 5, 1, 106—110.
2. Стреттон Теория электромагнетизма. М. Гостехиздат, 1948
3. Л. М Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.— Л, Изд-во АН СССР, 1955.
4. M. A. Biot. Propagation of elastic waves in a cylindrical boar containing a fluid. Appl. Phys., 1952, **23**, 9, 997—1005.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
25 февраля 1959 г.