АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

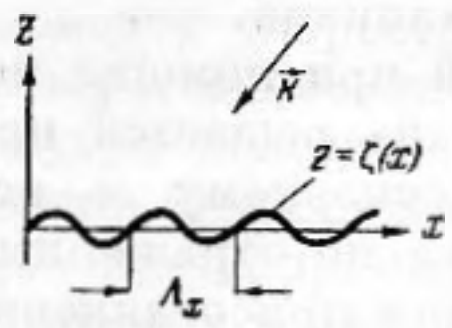
РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА

Д. С. Грасюк

Решается задача о рассеянии звука на неровной границе раздела жидкости и твердого тела. Неровность предполагается периодической с амплитудой, малой по сравнению с длиной волны падающего излучения. При помощи приближенного метода Рэлея оцениваются амплитуды волн, скользящих вдоль поверхности, и сдвиговых волн в твердом теле. Показано, что при малых углах падения (до 12°) сдвиговыми волнами можно пренебрегать.

Задача о рассеянии волн поверхностью с регулярными неровностями, амплитуды которых малы по сравнению с длиной волны, решена уже давно для абсолютно отражающих поверхностей [1, 2]. В случае упругой неровной поверхности задача решена только в работе [3], где рассматривается рассеяние волн свободной поверхностью твердого тела.

Настоящая работа посвящена вопросу о рассеянии звуковых волн неровной границей раздела жидкости и твердого тела. При этом предполагается, что на неровную, бесконечно протяженную поверхность, заданную уравнением $z=\zeta(x)$, где $\zeta(x)$ — периодическая функция с периодом Λ_x, падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды (фиг. 1). Прямоугольная система координат выбирается так, чтобы плоскость xz совпадала с плоскостью падения волны.



Фиг. 1

Неровности предполагаются малыми по сравнению с длиной волны, т. е. $ka \ll 1$, где a — амплитуда неровности, k — волновое число падающего излучения. Далее, методом Рэлея находятся значения амплитуд нулевого и первого рассеянного и преломленного спектров с точностью до членов первого порядка малости относительно ka. При этом предположении нулевой спектр соответствует отражению от гладкой поверхности.

Из теории упругости [4] известно, что скорость частиц в каждой точке твердого тела может быть записана в виде $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\psi$, где φ — потенциал продольных волн, распространяющихся со скоростью $c=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, λ, μ — параметры Лямэ, ψ — потенциал поперечных (или сдвиговых) волн, для которых колебания частиц расположены в плоскости xz, $b=\sqrt{\mu/\rho}$ — скорость сдвиговых волн. Звуковое поле в жидкости мы будем характеризовать потенциалом φ. Плотность жидкости — ρ, упругость — λ, скорость звука в ней — c. Все величины для твердого тела мы будем отличать индексом 1. На границе раздела жидкости и твердого тела должна соблюдаться непрерывность нормальных составляющих напряжения Z_z и смещения U_z. Условие непрерывности тангенциальных составляющих напряжения сведется к равенству нулю на границе тангенциальной составляющей напряжения в твердом теле, так как в жидкости тангенциальных напряжений нет.

На период неровностей мы не будем накладывать никаких ограничений. Граничные условия для Z_z, Z_x, U_z запишем в местной системе ко-

ординат, в которой Z совпадает с нормалью к неровной поверхности в каждой ее точке. Тогда граничное условие непрерывности $Z_{z'}$ для каждой точки неровной поверхности запишется в следующем виде:

$$\varphi_1 - \frac{2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{m}\varphi = \frac{2}{\varkappa^2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}\right],$$

где $\frac{1}{m} = \frac{\rho}{\rho_1}$.

Условие равенства нулю $Z_{x'}$ на границе

$$2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = 2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z\partial x}\right] \tag{1}$$

и условие непрерывности $U_{z'}$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right].$$

Рассмотрим только один частный случай, когда из жидкости на твердое тело падает плоская волна $\varphi_0 = e^{i(px-\mu_0 z)}$. На границе раздела жидкости и твердого тела возбуждаются три группы спектров. Группа отраженных спектров запишется так:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i[(p+gn)x+\mu_n z]},$$

причем направления распространения этих спектров составляют с осью z углы $v_n = \arccos \mu_n/k$, где $\mu_n = \sqrt{k^2-(p+gn)^2}$. Группа продольных спектров в твердом теле будет

$$\varphi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n e^{i[(p+gn)x-\chi_n z]}$$

с углами распространения $\vartheta_1^n = \arccos \chi_n/k_1$, где $\chi_n = \sqrt{k_1^2-(p-gn)^2}$ и k_1 — волновое число продольных волн. Наконец, группа поперечных волн в твердом теле будет

$$\psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n e^{i[(p+gn)x-\nu_n z]}$$

с углами распространения $\gamma^n = \arccos \nu_n/\varkappa$, где $\nu_n = \sqrt{\varkappa^2-(p+gn)^2}$ и $\varkappa$ — волновое число поперечных волн.

Амплитуды 0-го и 1-го спектров будем находить из уравнений, получаемых после подстановки $\varphi, \varphi_1, \psi_1$ в граничные условия. В нулевом приближении мы получаем:

$$A_0 = \frac{Z_1\cos^2 2\gamma + Z_t\sin^2 2\gamma - Z}{Z_1\cos^2 2\gamma + Z_t\sin^2 2\gamma + Z}, \qquad B_0 = \frac{1}{m}\frac{2Z_1\cos 2\gamma}{Z_1\cos^2 2\gamma + Z_t\sin^2 2\gamma + Z},$$

Неровность зададим косинусоидальной: $\zeta = a\cos gx$, где $g = 2\pi/\lambda_x$.

$$D_0 = -\frac{1}{m}\frac{2Z_t\sin 2\gamma}{Z_1\cos^2 2\gamma + Z_t\sin^2 2\gamma + Z}, \tag{2}$$

где $Z = \rho c/\cos\vartheta$ — импеданц звуковых волн в жидкости, $Z_1 = \rho_1 c_1/\cos\vartheta_1$ и $Z_t = \rho_1 b/\cos\gamma$ — импеданцы продольных и поперечных волн в твердом теле.

В первом приближении

$$A_1 = \frac{M\left[\frac{4s^2\nu_1\chi_1}{\varkappa^2} + (\nu_1^2 - s^2)\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right)\right] + F\chi_1\varkappa^2 - N\left[\frac{2s\chi_1\nu_1}{\varkappa^2} - s\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right)\right]}{\mu_1\left[\frac{4s^2\nu_1\chi_1}{\varkappa^2} + (\nu_1^2 - s^2)\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right)\right] + \frac{\chi_1}{m}\varkappa^2},$$

$$B_1 = \frac{N\left[\frac{2s\nu_1\mu_1}{\varkappa^2} + \frac{s}{m}\right] + \left(\frac{M}{m} - F\mu_1\right)(\nu_1^2 - s^2)}{\mu_1\left[\frac{4s^2\nu_1\chi_1}{\varkappa^2} + (\nu_1^2 - s^2)\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right)\right] + \frac{\chi_1}{m}\varkappa^2}, \tag{3}$$

$$D_1 = \frac{-M\frac{2s\chi_1}{m} + N\left[\mu_1\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right) + \frac{\chi_1}{m}\right] + F\cdot 2\mu_1\chi_1 s}{\mu_1\left[\frac{4s^2\nu_1\chi_1}{\varkappa^2} + (\nu_1^2 - s^2)\left(1 - \frac{2s^2}{\varkappa^2}\right)\right] + \frac{\chi_1}{m}\varkappa^2},$$

где $s = p + g$, $M = ia\left\{-\frac{1}{2}(A_0 + 1)(\mu_0^2 + gp) + \frac{1}{2}B_0(\chi_0^2 + gp) - \right.$

$$\left. - \frac{1}{2}\nu_0 D_0(p - g)\right\},$$

$$N = ia\left\{B_0 p\chi_0^2\left(1 - \frac{g}{p} + \frac{gp}{\chi_0^2}\right) + D_0(\nu_0^2 - p^2)\nu_0\left(\frac{1}{2} - \frac{2gp}{\nu_0^2 - p^2}\right)\right\},$$

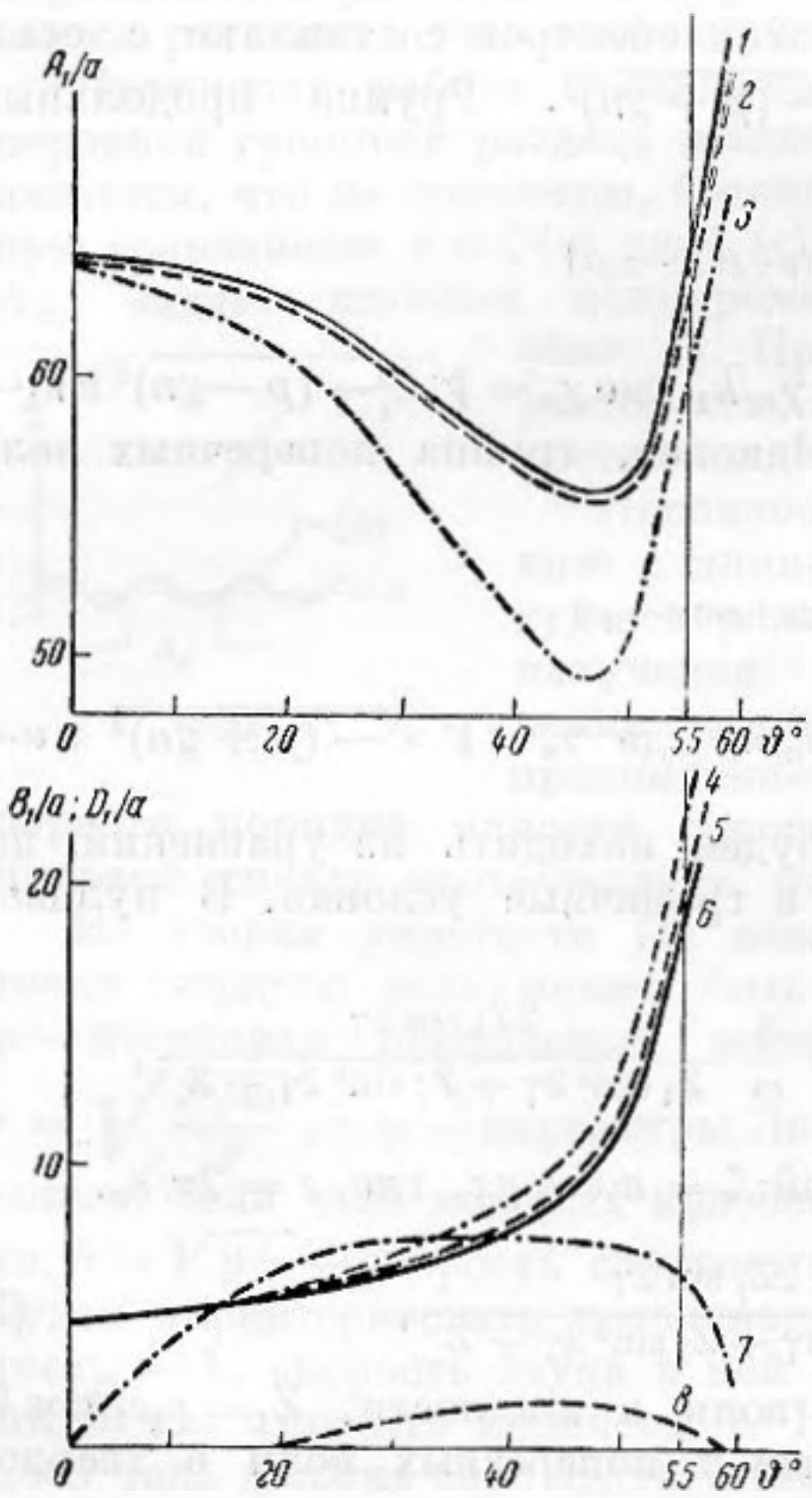
$$F = ia\left\{\frac{\mu_0}{2m}(1 - A_0) - B_0\chi_0\left[\frac{1}{2} - \frac{p(p - 2g)}{\varkappa^2}\right] + D_0\frac{p\nu_0^2}{\varkappa^2}\left(1 - \frac{g}{p} + \frac{gp}{\nu_0^2}\right)\right\}.$$

Выясним, при каких условиях амплитуда первого отраженного спектра (аналогично для преломленных) обращается в бесконечность. Для этого исследуем определитель системы уравнений в первом приближении. Для простоты рассмотрим случай нормального падения:

$$\Delta_1 = \mu_1\left[\frac{4g^2\nu_1\chi_1}{\varkappa^2} + (\nu_1^2 - g^2)\left(1 - \frac{2g^2}{\varkappa^2}\right)\right] + \frac{\chi_1}{m}\varkappa^2.$$

Если первый отраженный спектр скользит вдоль поверхности, т. е. $\mu_1 = k\cos\vartheta' = 0$, то его амплитуда станет бесконечно большой ($\Delta_1 = 0$) только при следующих условиях: 1) $\chi_1 = 0$. Это означает, что $c = c_1$; подобный случай мы исключим из рассмотрения. 2) $\varkappa = 0$, т. е. скорость сдвиговых волн бесконечно велика, и это нереально.

Предположим теперь, что первый продольный спектр в твердом поле скользит вдоль поверхности, т. е. $\chi_1 = k_1\cos\vartheta_1' = 0$. Его амплитуда обратится в бесконечность при условии $(\nu_1^2 - g^2)(1 - 2g^2/\varkappa^2) = 0$. Это означает, что при $k_1 = g$ параметр Лямэ $\lambda = 0$. Этот случай тоже нереален.



Фиг. 2

Из приведенных рассуждений следует, что для данного граничного условия амплитуды отраженных спектров и амплитуды продольных и поперечных спектров в твердом теле, рассчитанные по методу Рэлея, остаются конечными при любых условиях, и даже в том случае, если соответствующий спектр скользит вдоль поверхности. Отметим, что при гра-

ничном условии $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{z=\zeta(x)} = 0$ (абсолютно жесткая стенка) амплитуда спектра, скользящего вдоль поверхности, рассчитанная этим же методом, обращается в бесконечность.

Рассмотрим конкретный пример: границу раздела воды и песчаного дна. Применим к этому случаю формулы (3), считая дно твердым телом с волнистой поверхностью. Величину скорости продольных волн в песчаном дне выберем равной $c_1 = 1{,}15\,c$ при $\rho_1/\rho = 2{,}7$ [5]. Так как скорость сдвиговых волн в песчаном дне b является переменной величиной, зависящей от глубины, будем проводить расчеты для трех значений b: 0;100 *м/сек*; 500 *м/сек*. Зададим $\Lambda_x = 2$ *см*; $\lambda_x/\Lambda = 20$.

На фиг. 2 представлены амплитуды первого отраженного в жидкость (*1*, *2*, *3*), первых продольного (*4*, *5*, *6*) и поперечного (*7*, *8*) спектров в твердом теле в зависимости от угла падения ϑ для трех указанных выше значений скорости сдвиговых волн. По оси ординат отложены величины A_1/a, B_1/a, D_1/a, где a — амплитуда неровности. Сплошные кривые отвечают значению $b = 0$, штриховые — $b = 100$ *м/сек*, штрих-пунктирные — 500 *м/сек*.

Из этой фигуры можно сделать следующие выводы: 1. Сдвиговые спектры для $b = 100$ *м/сек* (кривая *8*) появляются только при $\vartheta > 20°$ и величина их настолько незначительна, что ими можно пренебречь и рассчитывать амплитуды отраженных и преломленных продольных спектров по более простым формулам для границы раздела двух жидкостей, полагая скорость распространения звука в нижней жидкости и ее плотность равными скорости продольных волн и плотности в песчаном дне. 2. Амплитуда сдвиговых волн при $b = 500$ *м/сек* (кривая *7*), начиная с $\vartheta = 15°$, становится сравнимой с амплитудой преломленных продольных волн.

3. При $\vartheta = 55°{,}3$, $\chi_1 = 0$, т. е. первый продольный спектр в твердом теле скользит вдоль поверхности, но амплитуда его остается конечной. При дальнейшем увеличении угла падения величина χ_1 становится мнимой, первый продольный спектр будет неоднородной волной, распространяющейся вдоль оси x с амплитудой, затухающей по экспоненте при удалении от неровной поверхности. Поперечные волны остаются обычными плоскими волнами, хотя и с небольшой амплитудой.

В заключение автор пользуется случаем принести благодарность Л. М. Бреховских за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука, т. 2, § 272 а. М., Гостехиздат, 1940.
2. Л. М. Бреховских. Дифракция волн на неровной поверхности. Ж. эксперим. и теор. физ., 1952, 23, 3, 275—299.
3. Ryosuke Sato. The reflaction of elastic waves on corrugated surface. Geophysical Institute, Faculty of Science, Tokyo University (Received November 29, 1954).
4. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Механика сплошных сред, § 56. М., Гостехиздат, 1944.
5. Распространение звука в океане. Сб. статей. М., ИЛ., 1951.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
17 августа 1959 г.