АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШИРИНЫ ФРОНТА АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, БЛИЗКОЙ ПО ФОРМЕ К ПИЛООБРАЗНОЙ

Л. К. Зарембо

Предлагается метод определения ширины фронта периодической пилообразной волны по измерению спектральных составляющих волн. Приближенно о ширине фронта можно судить по поглощению. С точки зрения предлагаемого метода обсуждаются имеющиеся в литературе данные по спектральному анализу пилообразных волн в воде.

В работе [1, 2] было показано, что ультразвуковая волна конечной амплитуды при достаточной интенсивности переходит по мере распространения в волну, форма которой близка к пилообразной. Ряд физических особенностей этих волн, в частности пропорциональность поглощения звуковому давлению, указывают на то, что эти волны можно считать периодическими ударными волнами небольшой интенсивности. Ширина ударной волны, как известно, определяется диссипативными процессами и в случае небольших скачков давления дается соотношением [3]:

$$\varkappa = 8bV^3/c_0^3\,(p_2 - p_1)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s,$$

где $b = {}^4/_3\,\eta + \eta' + \mu\,(1/c_v - 1/c_p)$, η и η' — сдвиговая и объемная вязкости, μ — коэффициент теплопроводности, $p_2 - p_1$ — скачок давления, V — удельный объем. Для идеального газа в случае периодической волны

$$\varkappa = \frac{2\lambda}{\pi\,(\gamma + 1)\,\mathrm{Re}}, \tag{1}$$

где введено акустическое число Рейнольдса $\mathrm{Re} = P^{(0)}/b\omega$, длина волны λ и считалось, что $p_2 - p_1 = 2P^{(0)}$ (см. фиг. 1). Отметим здесь, что приведенное соотношение для ширины волны получено в предположении о линейном характере диссипативных процессов в слое скачка. Вопрос о справедливости этого предположения представляется весьма интересным.

В данной заметке обсуждается один метод экспериментального определения ширины фронта периодической пилообразной волны, а также, с точки зрения этого метода, проводится анализ имеющихся в литературе экспериментальных данных, полученных для периодических пилообразных волн в воде [1, 4].

Рассмотрим пилообразную волну давления с пологим фронтом, показанную на фиг. 1. Она может быть представлена в виде

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{2P^{(0)}}{a}\,t & -\dfrac{a}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{2P^{(0)}}{b}\,t + P^{(0)}\left(1 + \dfrac{a}{b}\right) & \dfrac{a}{2} < t < \dfrac{a}{2} + b. \end{cases}$$

Представляя эту функцию в виде ряда Фурье $p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \sin k\,\omega t$, для p_k

получим

$$p_k = \frac{2P^{(0)}}{k(\pi-\delta)} \frac{\sin k\delta}{k\delta}, \tag{2}$$

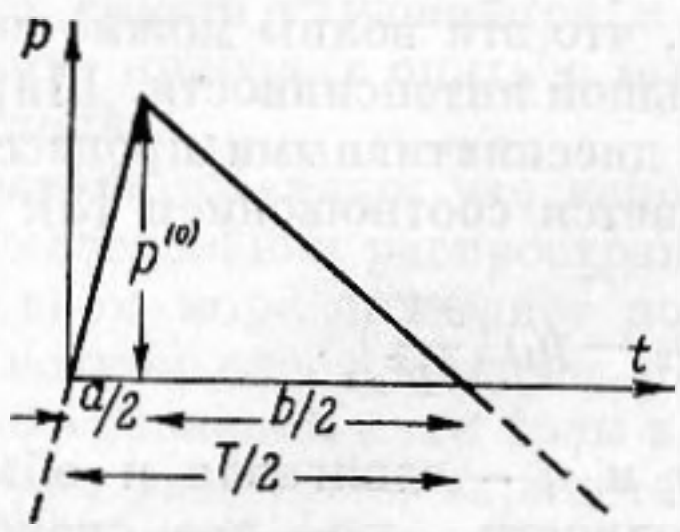
где $\delta = \pi a/T$. Отсюда легко получить предельные случаи: для идеальной пилообразной волны с нулевой шириной фронта ($\delta \to 0$, фиг. 2, *а*) $p_k = 2P^{(0)}/k\pi$ для «обратной» идеальной пилы ($\delta \to \pi$, фиг. 2, *б*) $p_k = (-1)^{k-1}2P^{(0)}/k\pi$; при $a = b = T/2$ (фиг. 2, *в*) $p_k = 8P^{(0)} \sin \frac{k\pi}{2} / \pi^2$.

Из (2) следует:

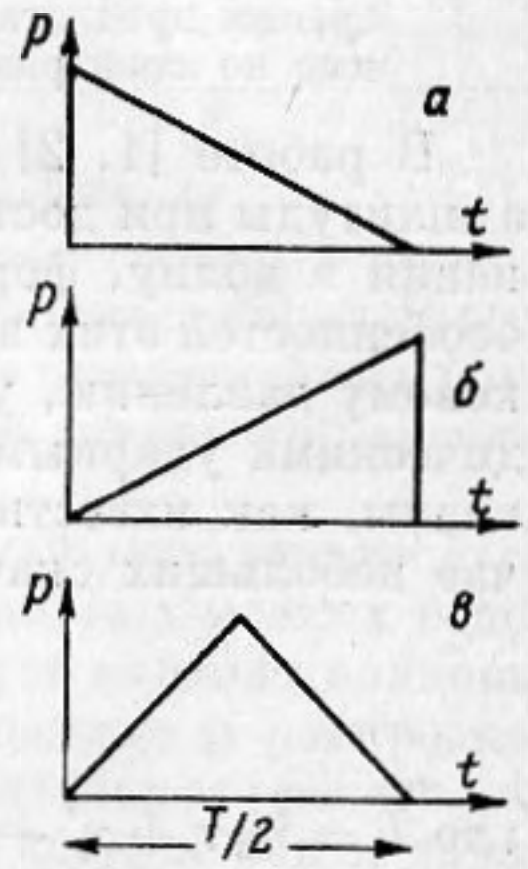
$$p_k/p_1 \equiv g_k = \frac{\sin k\delta}{k^2 \sin \delta}. \tag{3}$$

Значения g_k по (3) приведены на фиг. 3 для различных $a/T = \delta/\pi$. Отметим, что $a/T = \varkappa'/\lambda$, где $\varkappa'$ — ширина фронта периодической пилообразной волны. Вообще, если форма волны близка к пилообразной, то по измеренному спектральному составу, или даже одному из отношений g_k, из (3) может быть определена ширина фронта волны $\varkappa'$.

Для волны, близкой по форме к пилообразной, может быть установлена также связь между шириной фронта и поглощением. Поскольку энергия волны — квадратичная функция переменных поля, спектральное распределение по энергии определяется $\sigma_k = g_k^2 = \sin^2 k\delta / k^4 \sin^2 \delta$. Пользуясь соотношением для коэффициента поглощения волны конечной амплитуды $\alpha = \alpha_1^0 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sigma_k$ [5], здесь α_1^0 — коэффициент поглощения волны малой амплитуды с частотой, соответствующей частоте основной волны, мы получим $\alpha/\alpha_1^0 = 1/\sin^2\delta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\sin k\delta/k)^2 \sim 1/\sin^2\delta \cdot \int_0^{\infty} (\sin \delta x/x)^2 dx = \pi\delta/2 \sin^2 \delta$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отсюда для малых δ определяется ширина фронта пилообразной волны

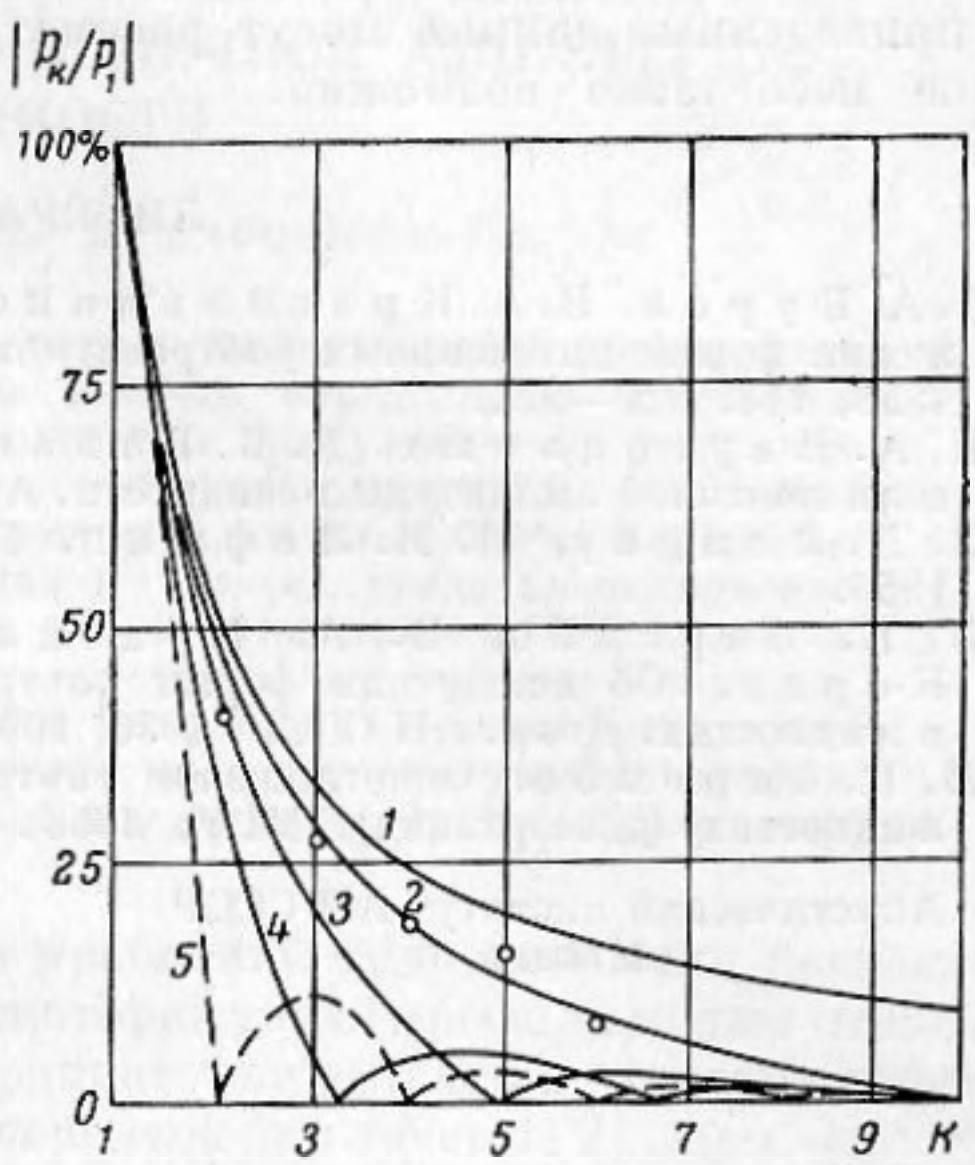
$$\varkappa' \sim \lambda\alpha_1^0/2\alpha. \tag{4}$$

Хотя соотношение (4) получено для $\varkappa' \ll \lambda$, оно дает разумный результат и для синусоидальной волны, когда $\alpha_1^0/\alpha = 1$.

Далее из соотношения для коэффициента поглощения пилообразной волны $\alpha/\alpha_1^0 = (\gamma + 1)\,\mathrm{Re}/\pi$ и из (4) можно получить $\varkappa' \sim \pi\lambda/2(\gamma + 1)\,\mathrm{Re}$, что с точностью до постоянного коэффициента порядка единицы совпадает с (1). Соотношение (4) позволяет по известному коэффициенту по-

глощения судить о ширине фронта волны. Отметим, что при выводе соотношения (4), так же как и выражения (1), диссипативные процессы предполагались линейными.

В настоящее время имеется очень немного экспериментальных данных по искажению волн конечной амплитуды с образованием пилообразной волны [1, 2, 4]. Все эти данные относятся к распространению волн конечной амплитуды в воде. В [1] проводилось определение формы и спектрального состава волны при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 50$ ($b = 0{,}036$ *пуаз* на ~ 20 *см* от источника звука, где крутизна фронта была максимальной, интенсивность $I \simeq 32$ *вт/см*^{2} и $P^{(0)} = (3\rho_0 c_0)^{1/2} \approx 12$ *атм*; частота 1 *мгц*). Пользуясь (1), при $\gamma \simeq 7{,}7$ получим $\varkappa \simeq 2 \cdot 10^{-3}\lambda$. На фиг. 3 точками отмечены данные гармонического анализа формы волны, указывающие на то, что экспериментальная ширина фронта $\sim 0{,}1\lambda$, т. е. на два порядка отличается от рассчитанной по (1). В [4] для максимальной интенсивности в воде $\mathrm{Re} \sim 14$ и по (1) $\varkappa \simeq 5 \cdot 10^{-3}\lambda$. Вместе с тем измерение гармонических составляющих дает на 40 *см* от источника звука $g_2 \sim 33\%$, что соответствует ширине фронта $\sim 0{,}25\lambda$, т. е. также почти на два порядка бóльшую величину. Существенно отметить, что в [1, 4] форма волны или спектральный состав определялись при непрерывной работе излучателя звука порядка нескольких секунд (в [4] это время даже было бóльшим). Вместе с тем есть основания предполагать, что ширина фронта волны меняется во времени.



Фиг. 3.
1 — $\delta = 0$; *2* — $\delta = 0{,}1\pi$; *3* — $\delta = 0{,}2\pi$; *4* — $\delta = 0{,}3\pi$; *5* — $\delta = 0{,}5\pi$

Следует указать также на принципиальные трудности определения этим методом ширины фронта $\varkappa \lesssim 10^{-2}\lambda$. Для этого выясним точность измерения гармонических составляющих, необходимую для отличия волны с некоторой конечной шириной фронта от идеальной пилообразной (см. фиг. 2, *а*) *. Из (3) для малых δ, с точностью до членов $\sim \delta^4$, получим

$$g_k = [1 - (k^2 - 1)\,\delta^2/6]/k$$

и

$$\Delta g_k/g_k = \pi^2 (k^2 - 1)\,\varkappa'^2/6\lambda^2,$$

где $\Delta g_k = g_k^0 - g_k$, g_k^0 — спектральные составляющие идеальной пилообразной волны. Из этого соотношения при $\varkappa'/\lambda \sim 10^{-1}$ ошибка измерения второй гармоники не должна превышать $\sim 5\%$, шестой гармоники $\sim 60\%$. Уменьшение ширины фронта требует уменьшения допустимой ошибки измерения пропорционально $\varkappa'^2/\lambda^2$. Поскольку ошибка в [1] $\sim 10-15\%$, отличие волны с шириной $\sim 10^{-1}\lambda$ от идеальной или от волны с шириной $\sim 10^{-3}\lambda$ может быть установлено в том случае, если указанная точность сохранялась для третьей и более высоких номеров гармоник.

* На необходимость этого автору указал Н. А. Рой.

Подводя итоги, можно сказать, что применение в той или иной модификации метода спектрального анализа формы волны в случае чрезвычайно тонкой ширины фронта волны, который должен был бы быть по (1) или (4) в жидкостях при линейном характере диссипативных процессов, существенно осложняется точностью, с которой могут быть измерены гармонические составляющие. Имеющиеся в литературе экспериментальные данные не позволяют с полной уверенностью сказать (имея в виду возможные систематические ошибки) о несогласии теории с экспериментом, однако приведенные данные могут рассматриваться как указание на то, что такое несогласие возможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Буров, В. А. Красильников. Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. Докл. АН СССР, 1958, 118, 920—923.
2. К. А. Наугольных, Е. В. Романенко. К вопросу о распространении волн конечной амплитуды в жидкости. Акуст. ж., 1958, 4, 2, 200—202.
3. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
4. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, В. В. Шкловская-Корди. Об искажении формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в жидкостях. Докл. АН СССР, 1956, 109, 485—488.
5. Л. К. Зарембо. О поглощении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях (диссертация). МГУ, 1958.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
3 апреля 1959 г.