АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

К ВОПРОСУ О ПОВЕРХНОСТНОМ РЕЗОНАНСЕ НА СИНУСОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. П. Лысанов

На основе модифицированного метода Рэлея исследуется явление поверхностного резонанса на пологой синусоидальной поверхности с малой амплитудой.

При падении плоской звуковой волны на периодическую поверхность помимо зеркально отраженной волны появляется рассеянное поле, состоящее из бесконечной дискретной совокупности дифракционных спектров различных порядков, направления распространения которых определяются условием: $\sin\theta_n = \sin\theta_0 + n\lambda/L$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где θ_0 — угол падения первичной волны, λ — длина волны звука, L — пространственный период отражающей поверхности, n — порядок спектра.

При $|\sin\theta_n| > 1$ данный спектр представляет собой неоднородную волну, амплитуда которой экспоненциально убывает при удалении от поверхности. При $|\sin\theta_n| = 1$ спектр n-го порядка распространяется вдоль поверхности. В случае абсолютно жесткой поверхности многократные возмущения от каждого периода поверхности, распространяющиеся также вдоль ее, складываются в фазе, что может приводить к появлению интенсивных скользящих спектров, амплитуды которых могут во много раз превосходить амплитуду падающей волны. Это явление получило название поверхностного резонанса [1]. Интересно отметить, что явление поверхностного резонанса при дифракции света на дифракционной решетке было обнаружено экспериментально очень давно [2]. Строгая теория этого явления недавно была развита Дерюгиным для поверхности в форме прямоугольных канавок [1]. Однако эта теория не применима к случаю пологих неровных поверхностей, имеющих, например, синусоидальную форму.

В настоящей работе явление поверхностного резонанса для пологой синусоидальной поверхности с малой амплитудой исследуется на основе модифицированного метода Рэлея. В методе Рэлея основными являются два момента: во-первых, приближенное представление поля вблизи неровной поверхности в виде суперпозиции обычных плоских волн, распространяющихся от поверхности, и неоднородных плоских волн, затухающих при удалении от поверхности и, во-вторых, представление амплитуд этих волн в виде рядов по степеням малого параметра ka, где k — волновое число звука, a — амплитуда неровностей. Применение метода Рэлея в его обычной форме не дает возможности исследовать явление поверхностного резонанса, так как по мере приближения направления распространения одного из спектров к скользящему, его амплитуда независимо от величины ka неограниченно растет как $1/\cos\theta$, где θ — угол рассеяния этого спектра, и полученное решение теряет смысл. К точно такому же результату приводят как метод малых возмущений граничных условий, основанный на разложении решения в ряд по величине ka, так и приближение Кирхгофа, не учитывающее многократных возмущений с самого начала. Первая попытка преодолеть указанную трудность метода Рэлея была предпринята Артманом [3], который предположил, что амплитуда скользящего вдоль периодической поверхности спектра $\sim 1/ka$ независимо от его номера, в то время как амплитуды всех остальных спектров порядка единицы.

Хотя на основе этого предположения удалось получить для амплитуд спектров выражения, описывающие резонансные свойства поверхности, однако правильная оценка порядка величин входящих в уравнение искомых коэффициентов, от чего существенно зависит величина амплитуд, представляет при этом большие трудности. Кроме того, в ряде случаев, например, для синусоидальной поверхности, это предположение неверно, как это следует из полученных ниже результатов. В дальнейшем мы используем приближенное рэлеевское выражение полного поля вблизи неровной поверхности, но откажемся от разложения решения в ряд по ka.

Ограничиваясь ради простоты рассмотрения случаем нормального падения, потенциал скоростей полного поля над рассеивающей поверхностью представим в виде

$$\varphi(x, z) = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{inqx + ik\beta_n z}, \tag{1}$$

где $\beta_n = \sqrt{1-(nq/k)^2}$, $q = 2\pi/L$. Граничное условие имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \\ \text{или}\quad & \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } z = \zeta(x), \tag{2}$$

где $\zeta(x) = a\cos qx$ — уравнение неровной поверхности. Подставив ряд (1) в (2) и поделив каждый член уравнения на $ike^{-ik\zeta}$, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{inqx}\left(\beta_n - (nq/k)(\partial\zeta/\partial x)\right) e^{is_n \cos qx} = 1, \tag{3}$$

где $s_n \equiv ka(1+\beta_n)$.

Учитывая известные соотношения

$$e^{is_n \cos qx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(s_n) e^{imqx} \text{ и}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} e^{is_n \cos qx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \frac{mq}{k(1+\beta_n)} J_m(s_n) e^{imqx}$$

и приравнивая в (3) по отдельности нулю коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, мы получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения A_n:

$$\left.\begin{aligned} &J_0(s_0) A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(s_n) A_n = 1 \\ &J_m(s_0) A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nm} A_n = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где J_m — функции Бесселя,

$$\gamma_{nm} = (-i)^n \left[J_{m-n}(s_n)\sigma_{n,\,m-n} + (-1)^n J_{m+n}(s_n)\sigma_{-n,\,m+n}\right], \tag{5}$$

$$\sigma_{n,\,m} = \beta_n - \frac{nm}{+\beta_n}\left(\frac{q}{k}\right)^2.$$

Для решения полученной системы воспользуемся способом, примененным ранее для решения другой задачи [4]. Для нахождения A_n будем решать не бесконечную систему уравнений, а конечную, состоящую из $m+1$ первых уравнений и содержащую $m+1$ первых неизвестных. В указанном приближении первые n коэффициентов A_n определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
A_0^{(m)} &= \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} B_{0\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{2\nu}}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} D_{\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{2\nu}};\\
A_1^{(m)} &= \frac{B_{00}^{(m)}\cdot(ka)\cdot\beta_2\beta_3\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} B_{1\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{1+2\nu}}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} D_{\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{2\nu}};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_n^{(m)} &= \frac{B_{n0}^{(m)}\cdot(ka)^n\beta_{n+1}\beta_{n+2}\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} B_{n\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{n+2\nu}}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} D_{\nu}^{(m)}\cdot(ka)^{2\nu}}.\\
&(n<m)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Функции Бесселя, входящие в (4), заменены в этих выражениях соответственными рядами по степеням ka. Коэффициенты $B_{n\nu}^{(m)} = B_{n\nu}^{(m)}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $D_{\nu}^{(m)} = D_{\nu}^{(m)}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ в явном виде не выписаны, так как в данном случае наиболее существенное значение имеет самая структура получающихся выражений. Что касается их конкретных значений, то они могут быть легко получены для произвольного приближения.

Необходимое число уравнений $(m+1)$ определяется параметрами неровной поверхности, длиной волны звука и задаваемой относительной точностью вычисления коэффициентов A_n. Так, например, считая $ka \ll 1$, для исследования резонанса первого спектра достаточно рассматривать систему из трех уравнений $(m=2)$, для исследования резонанса второго спектра— систему из четырех уравнений $(m=3)$.

Рассмотрим случай, когда спектр первого порядка распространяется вдоль поверхности ($\beta_1 = 0$). Из формул (6) получаем, пренебрегая в окончательных выражениях членами $\sim(ka)^2$ по сравнению с единицей,

$$A_0^{(2)} = \frac{1-2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}; \quad A_1^{(2)} = \frac{4\sqrt{3}}{ka\,(1+2i\sqrt{3})}; \quad A_2^{(2)} = \frac{2}{1+2i\sqrt{3}}. \qquad (7)$$

Мы видим, что амплитуда скользящего спектра A_1 может быть много больше амплитуды падающей волны, принятой за единицу.

Если вдоль поверхности распространяется спектр второго порядка ($\beta_2 = 0$), то в том же приближении, что и выше, мы получаем

$$A_0^{(3)} = 1; \quad A_1^{(3)} = \frac{-2ika}{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}; \quad A_2^{(3)} = \frac{-4i\sqrt{5}}{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}. \qquad (8)$$

В данном случае поверхностный резонанс выражен менее резко, чем для спектра первого порядка. Из формул (6) следует, что резонанс спектров

более высоких порядков вообще будет выражен еще слабее. При резонансе амплитуда скользящего спектра увеличивается в $\sim 1/(ka)^2$ раз. Так как амплитуда n-го спектра пропорциональна $(ka)^n$, то при $n \geqslant 3$ амплитуда его при резонансе хотя и увеличивается существенно, однако все равно остается малой по сравнению с амплитудой падающей волны. По существу для спектров порядка выше второго поверхностный резонанс на синусоидальной поверхности отсутствует.

Считая в формулах (6) $\frac{(ka)^2}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} \ll 1$, разложим правые части в ряд по степеням этой величины. С точностью до членов $\sim (ka)^2$ мы получаем

$$A_0 = 1 - \frac{(ka)^2}{\beta_1}; \quad A_1 = \frac{-ika}{\beta_1}; \quad A_2 = \frac{-(ka)^2(\beta_1^2 - q^2/k^2)}{2\beta_1\beta_2}. \tag{9}$$

Формулы (9) совпадают с известными формулами Рэлея [5]. Они перестают быть применимыми, когда направление распространения одного из спектров приближается к скользящему, при этом параметр, по которому проводилось разложение, будет уже не мал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Дерюгин. О поверхностном резонансе на отражательной решетке. Докл. АН СССР, 1954, 94, 203—206.
2. R. Wood. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating problem. Phil. Mag., 1902, 4, 396.
3. C. Artmann. Zur Theorie der anomalen Reflektion von optischen Stricgittern. Zs. f. Phys., 1942, 119, 529—567.
4. Ю. П. Лысанов. О рассеянии звука на неоднородной поверхности. Акуст. ж., 1958, 4, 1, 47—50.
5. Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. Sci. Papers, 1932, 388.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
13 мая 1959 г.