АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 1

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СХОДЯЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Б. Д. Тартаковский

Рассматривается распределение амплитуды звуковой колебательной скорости и звукового давления в фокальной плоскости сферических звуковых пучков с конечным углом раскрытия, характеризуемых неравномерным распределением амплитуды по волновому фронту. При этом допускается, что существенное изменение амплитуды по волновому фронту порядка величины самой амплитуды происходит на расстояниях не меньше λ/π. Так же как и при расчете коэффициента усиления, функция распределения амплитуды по фронту выражается полиномом, интегрирование которого позволяет представить решение в виде специальных функций.

Согласно [1] распределение колебательной скорости в фокальной плоскости дается интегральной формулой:

$$\frac{v}{v_0} = ikFe^{-ikF_1} \int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) J\ (kr \sin\alpha) \sin\alpha \cos\alpha d\alpha. \tag{1}$$

Положив $\Phi(\alpha) = 1 + a_1 y^2 + a_2 y^4 + \ldots$, где $y = \sin\alpha$, и сделав подстановку $w = kry$, мы получим

$$\frac{v}{v_0} = \frac{ikF}{(kr)^2} e^{-ikF} \int_0^u J_0(w) \sum_{p=0}^{\infty} (b_p v^{2p+1})\, dw, \tag{2}$$

где $b_0 = 1$ и $b_p = \frac{a_p}{(kr)^{2p}}$, $J_0(w)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $u = kry_{\max}$; $\alpha_{\max}$ — угол раскрытия волнового пучка. Используя рекуррентную формулу

$$\int_0^u w^{\mu+1} J_0(w)\, dw = -\mu^2 \int_0^u w^{\mu-1} J_0(w)\, dw + w^{\mu+1} J_1(w) + \mu w^{\mu} J_0(w), \tag{3}$$

доказательство которой мы опустим, получаем

$$\frac{v}{v_0} = K_v^0 \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} a_p y^{2p} \frac{2J_1(u)}{u} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{pa_p}{p+1} y^{2p} U_p \right\}, \tag{4}$$

где $k_{v,0} = ikFe^{-ikF} \frac{y^2}{2}$ — коэффициент усиления по колебательной скорости волнового пучка с постоянной амплитудой колебательной скорости по фронту, и U_p — функции, определяемые рекуррентной формулой

$$U_p = \frac{4(p+1)}{u^2} [pU_0 - J_0(u) - (p-1) U_{p-1}],\ U_0 = \frac{2J_1(u)}{u}, \tag{5}$$

приведенные к значению $U_p = 1$ при $u = 0$ и зависящие только от переменной $u = kry_{\max}$, $J_1(u)$ — функция Бесселя первого порядка, $U_{p=0}$

представляет собой функцию распределения в фокальной плоскости для волнового пучка с постоянной амплитудой на волновом фронте, впервые полученную Эйри, $U_{p>0}$ — функции, определяющие поправки, связанные с формой распределения амплитуды на волновом фронте.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. Коэффициент усиления линзы с переменной амплитудой по волновому фронту: $u = 0$,

$$\frac{v}{v_0} = K_v^0 \left[\sum_{p=0}^{\infty} a_p y^{2p} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p a_p}{p+1} y^{2p} \right] = K_v^0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p y^{2p}}{p+1}. \tag{6}$$

2. Амплитуда изменяется по волновому фронту по закону: $\Phi(\alpha) = 1 + a_1 y^2 + a_2 y^4$.

Согласно (4),

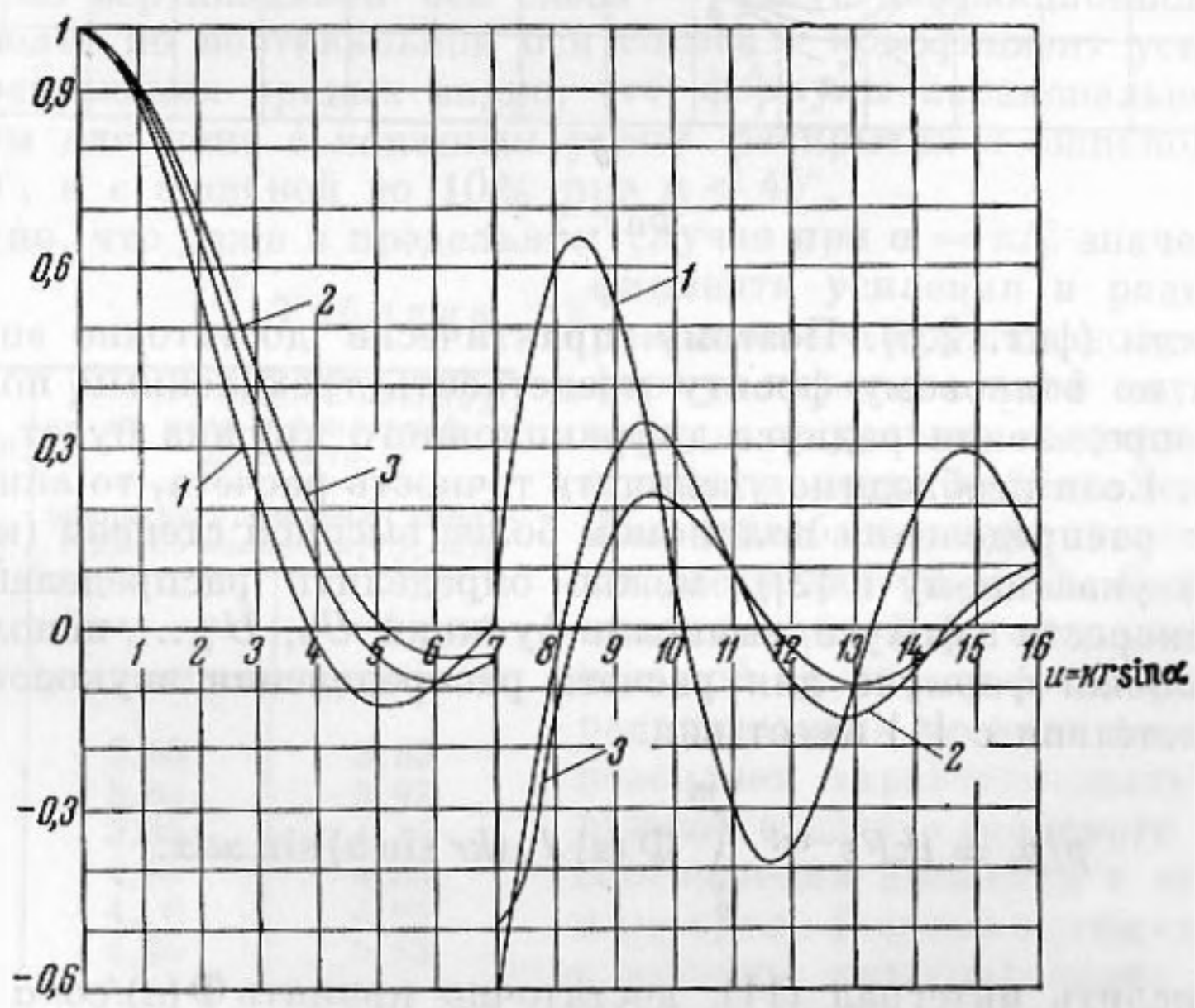
$$\frac{v}{v_0} = K_v^0 \left[(1 + a_1 y^2 + a_2 y^4) U_0 - \frac{1}{2} a_1 y^2 U_1 - \frac{2}{3} a_2 y^4 U_2 \right], \tag{7}$$

где

$$U_1 = \frac{8}{u^2} \left[\frac{2J_1(u)}{u} - J_0(u) \right], \tag{8}$$

$$U_2 = \frac{12}{u^2} \left[J_0(u) \left(\frac{8}{u^2} - 1 \right) - \frac{2J_1(u)}{u} \left(\frac{8}{u^2} - 2 \right) \right] \tag{9}$$

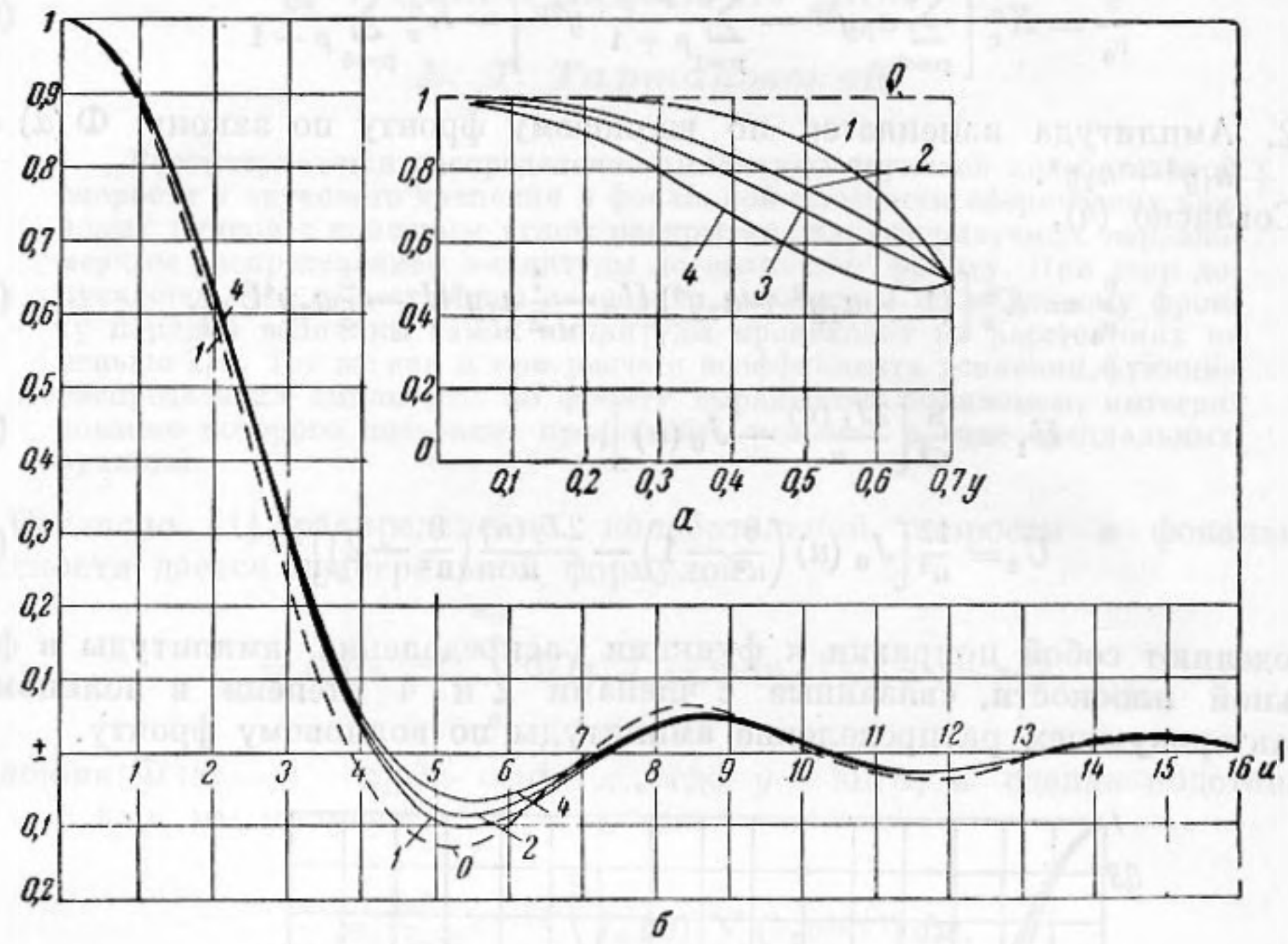
определяют собой поправки к функции распределения амплитуды в фокальной плоскости, связанные с членами 2 и 4 степени в полиноме, характеризующем распределение амплитуды по волновому фронту.



Фиг. 1

На фиг. 1 кривые *1*, *2*, *3* соответствуют функции $U_0 = 2J_1(u)/u$ и функциям (8) и (9). По горизонтальной оси отложен аргумент $u = kr \sin \alpha$. Начиная со значения $u = 7$ масштаб графика по вертикальной оси увеличен в 10 раз. Полученные функции позволяют оценить влияние неоднородности амплитуды по волновому фронту на распределение в фокальной плоскости.

Как показывает проделанный нами численный анализ, форма распределения амплитуды в фокальной плоскости определяется главным образом соотношением амплитуд на краю и в центре волнового пучка и мало зависит от промежуточных значений функции распределения амплитуды. Например, на фиг. 2, *а* представлены сильно различающиеся между собой эпюры распределения амплитуды по волновому фронту, вычисленные для одного и того же отношения амплитуд на краю и в центре: 1/2. Однако им соответствуют сливающиеся между собой кривые распределения в фокаль-



Фиг. 2

ной плоскости (фиг. 2,*б*). Поэтому практически достаточно эпюру распределения по волновому фронту представить трехчленным полиномом. Ошибка в определении радиуса дифракционного кружка будет при этом меньше 5%. Если необходимо увеличить точность расчета, то аппроксимируя эпюру распределения полиномом более высокой степени (например, по способу, указанному в [2]), можно определить распределение колебательной скорости в фокусе, вычислив функции U_3, U_4,..., используя (5).

Интегральная формула для расчета распределения звукового давления в соответствии с [1] имеет вид:

$$p/p_0 = ikFe^{-ikF} \int_0^{\alpha_m} \Phi(\alpha) J_0(kr \sin\alpha) \sin\alpha d\alpha. \qquad (10)$$

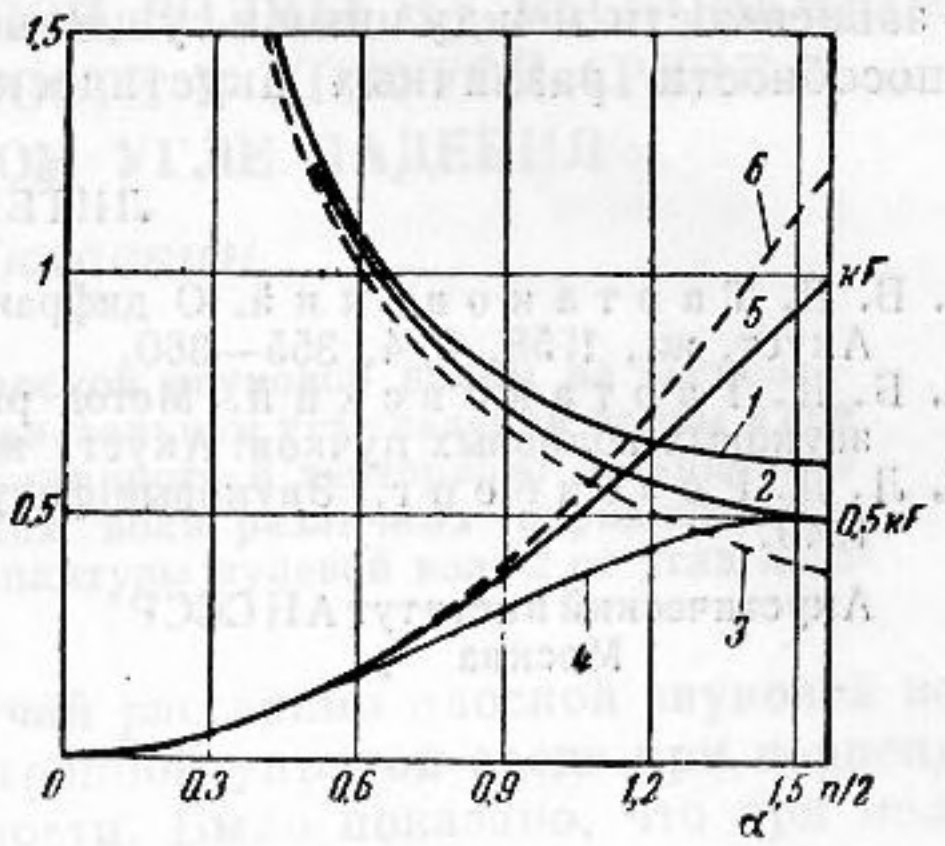
Чтобы вычислить интеграл (11), достаточно принять $\Phi(\alpha)/\cos\alpha = \Phi_1(\alpha)$, после чего получим уравнение, правая часть которого отличается от (1) только индексом. Очевидно, что выражения, описывающие распределение колебательной скорости, теперь могут быть применены для расчета распределения звукового давления.

Рассмотрим частный случай равномерного распределения звукового давления по сферическому фронту с большим углом раскрытия.

Интеграл (10) при $\Phi(\alpha) = 1$ для $\alpha_m = \pi/2$ приводится в [3]; он равен $p/p_0 = ikFe^{-ikF} \sin(kr)/kr$, откуда следует, что радиус кружка центрального максимума $r_{0,p} = \lambda/2$.

При значениях $[\alpha \neq \pi/2]$ приближенное значение (10) может быть получено путем разложения: $\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \ldots (y = \sin\alpha)$.

Для $\alpha \leqslant \pi/4$ с ошибкой до 4,2% можно ограничиться первыми тремя членами ряда. В области $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ вычисление удобно проводить, представляя функцию $1/\cos\alpha$ в виде трехчленного ряда, коэффициенты которого подбираются согласно [2].



Фиг. 3

На фиг. 3 приведены вычисленные таким образом, значения радиуса дифракционного кружка для колебательной скорости r_{0v} (кривая *1*) звукового давления r_{0p} (кривая *2*) в длинах волн в зависимости от угла раскрытия. Пунктирная кривая $r_{\text{пар}} = 0{,}61\lambda F/H$ (кривая *3*) иллюстрирует степень ошибки, допускаемой при использовании формулы параксиальной оптики. Здесь же представлены кривые, показывающие ход изменения коэффициентов усиления колебательной скорости K_v (кривая *4*) и звукового давления K_p (кривая *5*) в долях kF. Пунктирная кривая соответствует коэффициенту усиления параксиального пучка $K_{\text{пар}} = \pi H^2/\lambda F$ (кривая *6*). По горизонтальной оси отложен угол раскрытия α, по вертикальной оси слева — радиус дифракционного кружка в длинах волн, по вертикальной оси справа — коэффициент усиления.

Из сопоставления кривых видно, что формулы параксиальной оптики справедливы для линз с конечным углом раскрытия с ошибкой до 0,05 при $\alpha < 30°$, и с ошибкой до 10% при $\alpha < 45°$.

Интересно, что даже в предельном случае при $\alpha = \pi/2$ значения коэффициента усиления и радиуса дифракционного кружка, получаемые из формул параксиальной оптики, отличаются от точных величин для звукового давления не более чем на 25%. Для колебательной скорости ошибки достигают 40—60%. Слабая зависимость кривой распределения в фокальной плоскости от формы эпюры распределения по волновому фронту позволяет характеризовать фокусирующие свойства волнового пучка по соотношению амплитуд в его центре и на краю. В связи с этим становится излишним интегрирование функции распределения амплитуды по волновому фронту для каждой новой звуковой фокусирующей системы (при отсутствии аберрации и плавном изменении амплитуды по фронту волны).

Таблица

Относительная величина амплитуды на краю волнового пучка с углом раскрытия α	Радиус главного максимума поля в фокальной плоскости	
	эпюра распределения амплитуды по волновому фронту	
	$\Phi = 1 - ay^4$	$\Phi = 1 - ay^2$
1	3,83	3,83
0,8	3,85	3,97
0,6	3,95	4,14
0,4	4,05	4,33
0,2	4,[illegible]0	4,65
0	4,65	5,15

Для оценки зависимости величины радиуса дифракционного кружка от эпюры амплитуд может служить таблица значений радиусов дифракционных кружков, соответствующих различным эпюрам и соотношениям амплитуд на краю и в центре пучка.

При уменьшении амплитуды на краю волнового пучка вдвое радиус главного дифракционного максимума возрастает на 5—10%, что можно считать вполне допустимым. Однако при дальнейшем уменьшении амплитуды по краю волнового пучка дифракционный кружок расширяется

значительно и при снижении амплитуды до нуля увеличивается соответственно на 23—35%. В результате этого может произойти заметное ухудшение ультразвукового изображения.

Проведенный расчет позволяет путем вычисления графиков распределения в фокальной плоскости при различных эпюрах распределения амплитуды по волновому фронту получить достаточно полное представление о зависимости между ними и существенно облегчить анализ фокусирующей способности различных акустических фокусирующих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Д. Тартаковский. О дифракции звуковых волн в сходящихся пучках. Акуст. ж., 1958, 4, 4, 355—360.
2. Б. Д. Тартаковский. Метод расчета коэффициента усиления сходящихся звуковых волновых пучков. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 450—458.
3. Л. Д. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. М., Изд-во АН СССР, 1949.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
27 марта 1959 г.