АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

А. Л. Полякова

Распространение звука конечной амплитуды в релаксирующей среде рассмотрено во втором приближении и показано, что если $\rho_1/\rho_0 < 2\Delta c/c_0$, т. е. амплитуда звука меньше, чем величина, характеризующая дисперсию и релаксационное поглощение, то поведение 2-й гармоники определяется в основном поглощением. В этом случае эффекты, обусловленные сдвигом фазы из-за дисперсии, проявляются только на частотах, близких к $\omega\tau = 1/\sqrt{2}$, когда влияние дисперсии оказывается максимальным, а влияние поглощения — минимальным.

При распространении звуковой волны конечной амплитуды нелинейность уравнений движения и уравнения состояния среды приводит к тому, что форма волны изменяется по мере распространения, и в конце концов может образоваться ударная волна или волна пилообразной формы. Как известно, наличие вязкости в среде препятствует этому процессу; если вязкость достаточно велика, то волна может сильно поглотиться раньше, чем нелинейные искажения приведут к образованию разрывов. Возникает вопрос о поведении волны конечной амплитуды в среде, где релаксационные процессы приводят к дисперсии скорости звука и к повышенному поглощению вблизи частоты релаксации. Для ответа на этот вопрос надо решить совместно уравнения гидродинамики и уравнение реакции, которое описывает отклонение системы от положения равновесия (см. например, [1]). Будем решать эту задачу во втором приближении.

В релаксирующей среде свободная энергия единицы объема Ψ и давление P будут функциями трех параметров: $\Psi(\rho, T, \xi)$ и $P(\rho, T, \xi)$, где ρ — плотность, T — температура, а ξ — параметр, характеризующий отклонение системы от равновесия. Будем считать, что влияние сдвиговой вязкости пренебрежимо мало и все поглощение звука обусловлено лишь релаксационным процессом. Для полного описания процесса к уравнениям гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

надо добавить уравнение реакции, которое возьмем в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -K\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \tag{3}$$

где K — константа, определяющая скорость возвращения системы в состояние равновесия. Ищем решение в виде ряда последовательных приближений. Тогда, например, плотность среды будет иметь вид: $\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2$, где ρ_0 — плотность невозмущенной среды, ρ_1 и ρ_2 — решение первого и второго приближения, соответственно. Аналогичный вид имеют все остальные величины. Считая, что отклонения от равновесия для рассматриваемого круга задач всегда малы, можно разложить свободную

энергию в ряд по величинам $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, $\Delta\xi = \xi - \xi_0$ и выделить уравнения первого и второго приближения в системе (1) — (3). В первом приближении получаем известные выражения:

$$\rho_1 = Ae^{i(kx-\omega t)},$$
$$\xi_1 = -A\frac{\partial\xi_0}{\partial\rho}\frac{e^{i(kx-\omega t)}}{1-i\omega\tau}, \tag{4}$$

где комплексное волновое число $k = k_1 + ik_2$ определяется соотношением [2]:

$$k^2(\omega) = \omega^2\frac{1-i\omega\tau}{c_0^2 - i\omega\tau c_\infty^2}. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения $c_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{\text{равн}} = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_\rho\frac{\partial\xi_0}{\partial\rho}$, $c_\infty^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\xi$, т. е. c_0 есть скорость звука для очень медленных процессов, когда в течение периода успевает установиться новое состояние равновесия ($\omega\tau \ll 1$), а c_∞ — скорость звука для очень быстрых процессов, когда за время одного периода реакция не успевает произойти ($\omega\tau \gg 1$); время релаксации равно $\tau = K\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}$.

Уравнения второго приближения имеют вид:

$$\frac{\partial\xi_2}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\xi_2 + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\xi_0}{\partial\rho}\rho_2 = F_1(\rho_1, \xi_1),$$
$$\frac{\partial^2\rho_2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_\rho\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_\xi\frac{\partial^2\rho_2}{\partial x^2} = F_2(\rho_1, \xi_1). \tag{6}$$

Здесь F_1 и F_2 — квадратичные функции от решений первого приближения ρ_1 и ξ_1 (вернее, от действительных частей $\operatorname{Re}\rho_1$ и $\operatorname{Re}\xi_1$, получаемых из (4)).

Если решение системы (6) искать в виде $\rho_2 = R(x)e^{-2i\omega t}$ плюс комплексно сопряженное и аналогичное выражение для ξ_2, то зависимость от расстояния будет определяться уравнениями типа

$$\frac{d^2R}{dx^2} + k^2(2\omega)R = f\cdot e^{2ik(\omega)x},$$

где f — некоторая постоянная, зависящая от A^2, $k(\omega)$ и $k(2\omega)$. Это последнее уравнение характерно для биений. И, действительно, решением системы (6), например, для плотности будет выражение:

$$\rho_2 = B\left\{e^{2i[k(\omega)x-\omega t]} - e^{2i\left[\frac{k(2\omega)}{2}x-\omega t\right]}\right\},$$
$$B = \frac{f}{k^2(2\omega) - 4k^2(\omega)} = B_1 + iB_2. \tag{7}$$

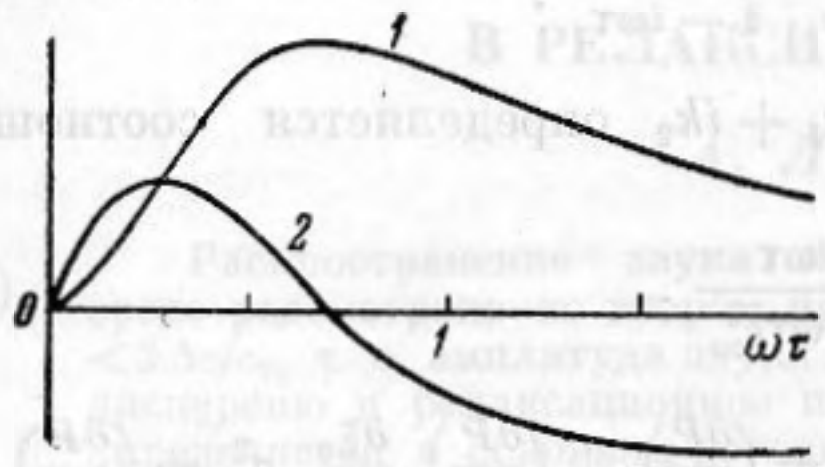
Это выражение выбрано так, чтобы удовлетворялось граничное условие $\rho_2(0, t) = 0$, т. е. излучатель, находящийся в точке $x = 0$, создает только 1-ю гармонику. $k(\omega) = k_1(\omega) + ik_2(\omega)$ и $k(2\omega) = k_1(2\omega) + ik_2(2\omega)$ — волновые числа для частот ω и 2ω, соответственно, определяемые из (5). Напомним, что если дисперсия невелика, т. е. можно пренебречь квадратами величины $m = \frac{c_\infty^2}{c_0^2} - 1$, что практически всегда справедливо, то

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c_0} - \frac{m\omega}{2c_0}\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2};\quad k_2(\omega) = \frac{m\omega}{2c_0}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Для удобства представим (7) в виде

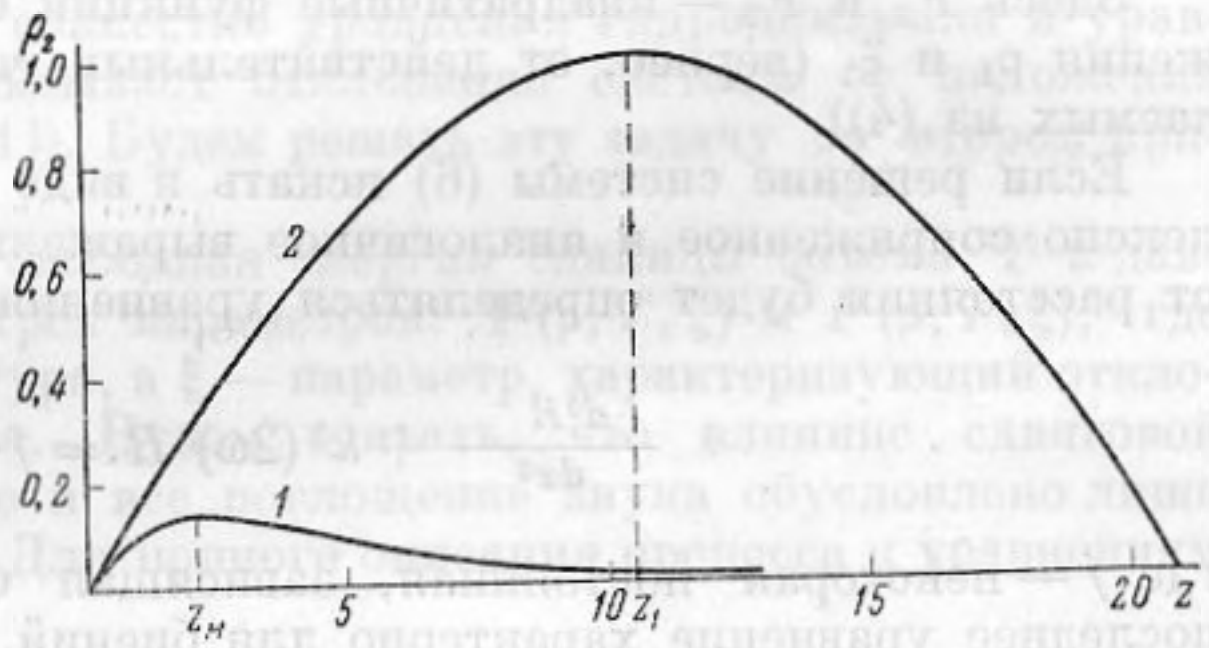
$$\rho_2 = 2|B|\sqrt{\operatorname{ch}^2 \Delta k_2 x - \cos^2 \Delta k_1 x}\, e^{-2\left(k_2+\frac{\Delta k_2}{2}\right)x} e^{+2i\left[\left(k_1+\frac{\Delta k_1}{2}\right)x-\omega t\right]+i\delta(x)}, \quad (8)$$

где введены обозначения: $\Delta k = \frac{k(2\omega)}{2} - k(\omega) = \Delta k_1 + i\Delta k_2$, а величина $\delta(x)$ представляет собой зависящий от x сдвиг фазы 2-й гармоники относительно 1-й, равный $\delta(x) = \operatorname{arc\,tg}(-B_1/B_2) + \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{th}\Delta k_2 x / \operatorname{tg}\Delta k_1 x]$.



Фиг. 1

Анализ выражения (8) показывает, что амплитуда 2-й гармоники, равная нулю в начале координат, сначала увеличивается, достигает максимума на некотором расстоянии $x_м$, а затем, как правило, монотонно убывает, что аналогично поведению 2-й гармоники при наличии сдвиговой вязкости [3]. Однако имеется и некоторое отличие, которое проявляется вблизи частоты, удовлетворяющей соотношению $\omega\tau = 1/\sqrt{2}$. Чтобы пояснить это, обратимся к фиг. 1, на которой изображена зависимость величин $-\Delta k_1/\omega$ (кривая *1*) и $\Delta k_2/\omega$ (кривая *2*) от $\omega\tau$. При $\omega\tau = 1/\sqrt{2}$ величина $-\Delta k_1/\omega$ имеет максимальное значение, а $\Delta k_2/\omega = 0$, т. е. при этой частоте влияние дисперсии максимально, а влияние поглощения минимально. Как видно из (8), в этом случае амплитуда ρ_2 пропорциональна $e^{-2k_2 x}\sin\Delta k_1 x$, т. е. амплитуда испытывает пульсации, и при $x = \frac{\pi \cdot n}{\Delta k_1}$ 2-я гармоника обращается в нуль. Однако затухание, определяемое множителем $e^{-2k_2 x}$, приведет к тому, что на этих расстояниях амплитуда будет уже очень мала. Для других частот наличие члена $\operatorname{ch}^2 \Delta k_2 x$ под корнем в выражении (8) приведет к монотонному затуханию амплитуды с расстоянием.



Фиг. 2

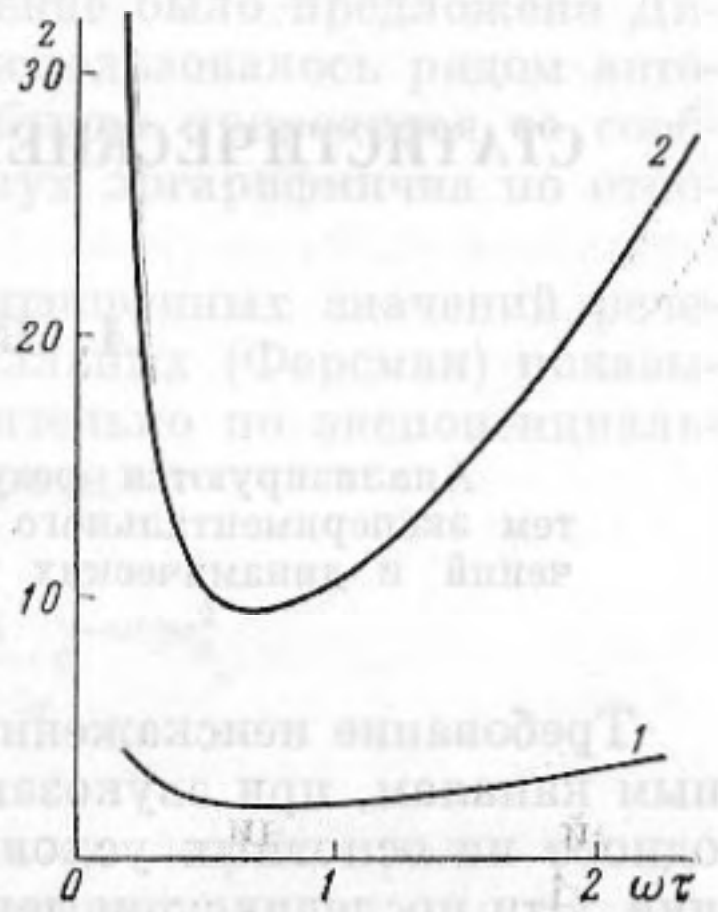
На фиг. 2 представлена зависимость амплитуды 2-й гармоники от величины $z = xm\omega/c_0$, пропорциональной числу длин волн $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, которое уложится на расстоянии x, для $\omega\tau = 1$ (кривая *1*). Для сравнения приведен один цикл пульсаций амплитуды, который имел бы место, если бы можно было пренебречь поглощением в (8) (кривая *2*). Такое поведение амплитуды обусловлено одной лишь дисперсией, т. е. сдвигом фазы 2-й гармоники относительно 1-й. Сдвиг фаз в точке z_1 равен $\pi/2$. Как видно из фигуры, поглощение сильно сказывается на расстояниях гораздо меньших, чем те, на которых сдвиг фаз становится существенным. Следовательно, характер изменения амплитуды 2-й гармоники с расстоянием определяется в основном поглощением.

Фиг. 3 представляет собой зависимость величины $z_м = x_м m\omega/c_0$, пропорциональной числу длин волн, укладывающихся до максимума, от $\omega\tau$ (кривая *1*). Кривая *2* изображает величину $z_1 = x_1 m\omega/c_0$, т. е. расстояние, на котором сдвиг фаз 1-й и 2-й гармоник равен $\pi/2$. Как видно, последнее расстояние значительно больше (приблизительно в 5 раз), чем расстояние до максимума амплитуды 2-й гармоники, определяемой из (8).

Заметим, что эти кривые (значения z) являются универсальными для всех веществ, в которых имеются релаксационные процессы, а расстояния $x_м$ и x_1 будут различными в разных средах — в зависимости от значений m, c_0 и ω. Зависимость амплитуды 2-й гармоники от частоты можно найти, вычисляя $|B| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$. Если пренебречь квадратами величины m, то получим

$$|B| = \frac{A^2}{4\rho_0 m\omega\tau}\sqrt{(1+\omega^2\tau^2)(1+4\omega^2\tau^2)}, \quad (9)$$

т. е. амплитуда обратно пропорциональна величине дисперсии m. Выражения (8) и (9) полностью определяют поведение 2-й гармоники в рассматриваемом приближении.



Фиг. 3

Анализ исходных уравнений показывает, что такой расчет применим лишь в случае весьма слабого влияния нелинейности, когда дисперсия и поглощение определяют весь ход процесса (т. е. число Рейнольдса $R = \frac{P}{\omega b} \leqslant 1$, где b — эффективная вязкость).

Для сравнения с экспериментом [4] определим величину сдвига фазы между 1-й и 2-й гармониками в зависимости от расстояния. В случае независимого распространения двух синусоид вида $\sin(k(\omega)x - \omega t)$ и $\sin[k(2\omega)x - 2\omega t]$ (как было бы в случае бесконечно малой амплитуды) сдвиг фазы равен $\Delta\varphi = -2\Delta k_1$. В нашем случае нелинейное взаимодействие гармоник приводит к тому, что сдвиг фазы становится равным $\Delta\varphi = -\Delta k_1 x - \delta(x)$. Эта зависимость имеет приблизительно линейный характер (во всяком случае на тех расстояниях, на которых обычно производятся измерения), и, следовательно, сдвиг фазы на данной частоте может быть характеризован наклоном этой прямой. Интересно отметить, что эксперимент дает несколько иную зависимость сдвига фазы от частоты, чем полученная выше, а именно, экспериментальный сдвиг довольно точно описывается формулой $\Delta\varphi = -\Delta k_1 x$. Однако надо иметь в виду, что условия, в которых проводился эксперимент в работе [4], несколько отличаются от условий расчета: во-первых, расчет проведен для плоской волны, а при эксперименте имела место волна, расходящаяся по закону, переходному между плоской и сферической. Замедление роста 2-й гармоники, имеющее место в сферическом случае, может сказаться и на величине сдвига фазы. Во-вторых, влияние нелинейности на опыте было существенным ($R \sim 1$), и волна имела сильно искаженную форму уже вблизи излучателя (присутствие высших гармоник), в то время, как в расчете считалось, что высшими гармониками можно пренебречь и что 2-я гармоника появляется только из 1-й.

В заключение выражаю благодарность Н. Н. Андрееву за постоянное внимание к работе и М. А. Исаковичу за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам и М. А. Леонтович. К теории поглощения звука в жидкостях. Ж. экспер. и теор. физ., 1937, **7**, 3, 438—449.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., 1954.
3. З. А. Гольдберг. О распространении плоских волн конечной амплитуды. Акуст. ж., 1957, **3**, 4, 322—328.
4. Е. В. Романенко. Искажение формы волны конечной амплитуды при распространении в релаксирующей среде. Акуст. ж., 1960, 6, 3, 374—380.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
2 февраля 1960 г.