АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 3

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРУЖЕННОЙ В ЦЕНТРЕ

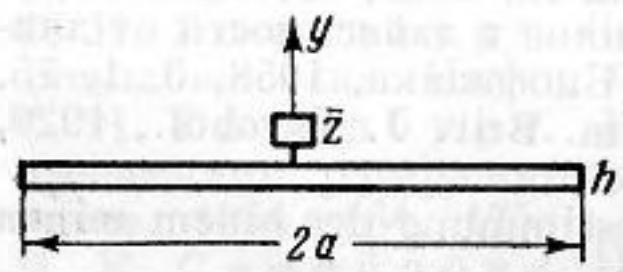
В. В. Тютекин

Рассматривается решение задачи о собственных частотах осесимметричных изгибных колебаний круглой упругой пластинки (диска), нагруженной в центре на произвольную импеданцную нагрузку. Выводится характеристическое уравнение и приводится его решение для случая инерционной нагрузки.

Решение задачи о колебаниях мембраны или тонкой упругой пластинки, нагруженной в некоторой точке их поверхности произвольной нагрузкой, представляет большой теоретический и практический интерес. Эта задача была приближенно решена еще Рэлеем [1], который рассматривал влияние малой инерционной нагрузки на изменение частоты собственных колебаний мембраны.

В настоящей работе рассматривается задача об определении собственных частот осесимметричных изгибных колебаний тонкой упругой круглой пластинки (диска), нагруженной в центре на импеданцную нагрузку произвольной величины.

Пусть рассматриваемый диск (фиг. 1) радиуса a имеет плотность ρ и цилиндрическую жесткость на изгиб $S = Eh^3/12(1-\sigma^2)$, где E — модуль Юнга, h — толщина диска, σ — коэффициент Пуассона. В центре (при $r = 0$) диск предполагается нагруженным на произвольную нагрузку $\overline{Z}$ (в общем случае комплексную), носящую импеданцный характер, т. е. действующую на диск только нормально к его поверхности; при этом предположении момент, действующий на диск со стороны нагрузки, будет равен нулю [2]. Как известно, изгибные волны, распространяющиеся по диску, должны удовлетворять уравнению



Фиг. 1

$$\Delta^2\xi - k^4\xi = 0, \tag{1}$$

где ξ — смещение частиц диска в направлении оси y, $k = \sqrt[4]{\omega^2\rho h/S}$ — волновое число изгибных волн, ω — частота. Решая уравнение (1) в цилиндрической системе координат и ограничиваясь рассмотрением только осесимметричных колебаний диска, для величины ξ получим выражение:

$$\xi = AJ_0(kr) + BN_0(kr) + CI_0(kr) + DK_0(kr), \tag{2}$$

где функции $J_0(\kappa r)$ и $N_0(\kappa r)$ — цилиндрические функции первого рода, $I_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ — цилиндрические функции второго рода (так называемые, гиперболические), а постоянные A, B, C, D, а также ω (входящая в величину κ) — неизвестные величины, подлежащие определению из условий, накладываемых на деформации и напряжения на границе диска (при $r = a$) и в его центре (при $r = 0$).

Рассмотрим вначале условия в центре диска. Если бы нагрузка в центре отсутствовала, то необходимо было бы коэффициенты B и D с самого начала положить равными нулю, поскольку, как известно, функции $N_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ при $r = 0$ обращаются в бесконечность. При этом $N_0(\kappa r) \to$

$\underset{r\to 0}{\to} \frac{2}{\pi} \ln \kappa r$ и $K_0(\kappa r) \underset{r\to 0}{\to} -\ln \kappa r$, т. е. порядок стремления $N_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$ к бесконечности один и тот же. Наличие импедансной нагрузки в центре дает одно дополнительное условие; поэтому в полученном решении необходимо сохранить функции $N_0(\kappa r)$ и $K_0(\kappa r)$, но подобрать коэффициенты B и D таким образом, чтобы при $r \to 0$ эти функции взаимно уничтожали друг друга. Очевидно для этого нужно, чтобы $D = 2/\pi B$. При этом условии решение для ξ принимает вид:

$$\xi = AJ_0(kr) + B\left[N_0(kr) + \frac{2}{\pi} K_0(kr)\right] + CI_0(kr). \tag{3}$$

Упомянутое ранее условие в центре диска должно заключаться в равенстве сил, действующих в точке $r = 0$. Поперечная сила на единицу длины окружности радиуса r, возникающая за счет деформаций диска, определяется выражением:

$$f = -S\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\xi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\xi}{dr}\right) = -Sk^2\left(\frac{d\xi_1}{dr} - \frac{d\xi_2}{dr}\right),$$

где ξ_1 — составляющая общего смещения ξ, выраженная через цилиндрические функции 1-го рода, ξ_2 — составляющая смещения, выраженная через цилиндрические функции 2-го рода. Суммарная сила F_1, действующая в центре диска, определится выражением:

$$F_1 = \lim_{r\to 0} 2\pi r f(r) = \lim_{r\to 0} 2\pi r S k^3 \Big[AJ_1(kr) + \\ + B\left(N_1(kr) - \frac{2}{\pi} K_1(kr)\right) + CI_1(kr)\Big]. \tag{4}$$

Поскольку $N_1(kr) \underset{r\to 0}{\to} -\frac{2}{\pi kr}$ и $K_1(kr) \underset{r\to 0}{\to} \frac{1}{kr}$, то из (4) мы получим

$$F_1 = -8BSk^2. \tag{5}$$

Сила F_2, воздействующая на диск в его центре и обусловленная движением импедансной нагрузки $\overline{Z}$, с учетом (3) может быть записана через смещение центра диска следующим образом * [2]:

$$F_2 = \overline{Z}\cdot\frac{\partial\xi(0)}{\partial t} = -i\omega\xi(0)\overline{Z} = -i\omega\overline{Z}(A + C). \tag{6}$$

Приравнивая силы F_1 и $-F_2$, мы получим условие в центре диска в виде

$$A + \frac{8Sk^2}{i\omega\overline{Z}} B + C = 0. \tag{7}$$

Для получения полной системы уравнений необходимо добавить еще два граничных условия на краю диска (при $r = a$). Эти условия должны быть известным образом [1] выбраны в зависимости от способа закрепления края диска. Не ограничивая общности решения задачи, мы рассмотрим только наиболее простой для расчета случай жесткого закрепления края диска. В этом случае граничные условия имеют вид: $\xi = 0$, $d\xi/dr = 0$ при $r = a$. Подставляя величину ξ из (3) в эти выражения, мы получим еще два уравнения, которые вместе с уравнением (7) образуют полную систему для определения коэффициентов A, B и C:

$$AJ_0(ka) + B\left[N_0(ka) + \frac{2}{\pi} K_0(ka)\right] + CI_0(ka) = 0, \tag{8}$$

$$AJ_1(ka) + B\left[N_1(ka) + \frac{2}{\pi} K_1(ka)\right] - CI_1(ka) = 0. \tag{9}$$

* Зависимость величины от времени характеризуем множителем $e^{-i\omega t}$.

Для того, чтобы система уравнений (7), (8), (9) имела нетривиальное решение необходимо, чтобы ее детерминант был равен нулю:

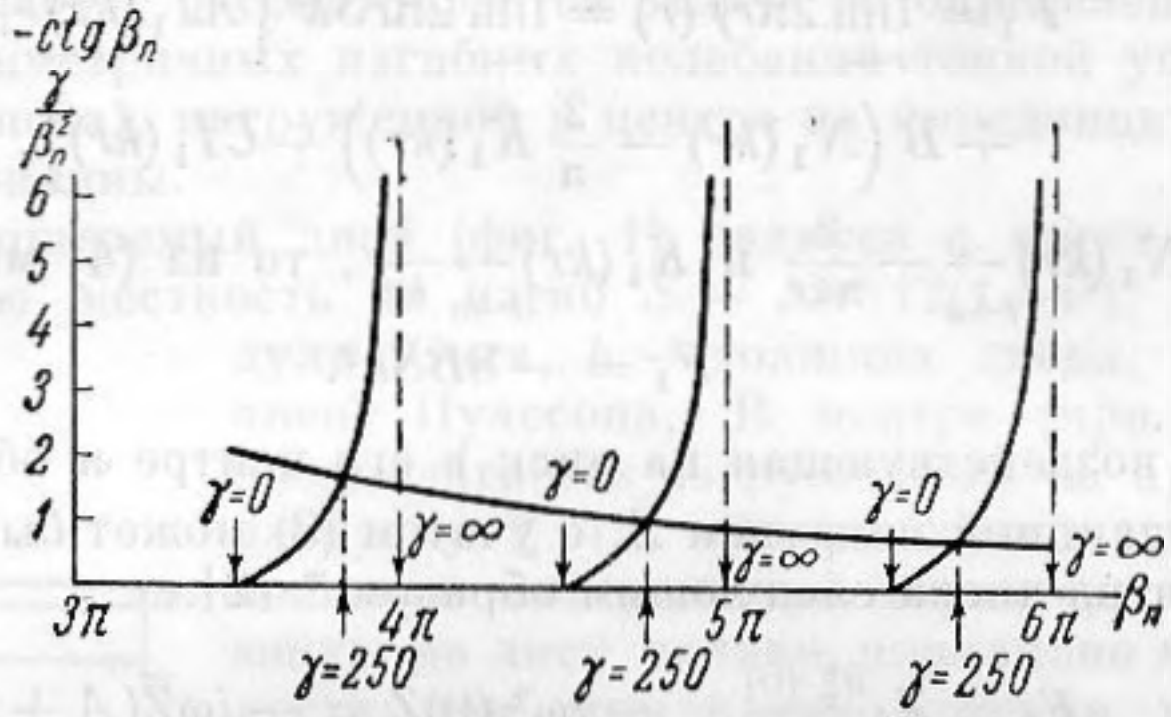
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{8Sk^2}{i\omega\overline{Z}} & 1 \\ J_0(ka) & N_0(ka)+\frac{2}{\pi}K_0(ka) & I_0(ka) \\ J_1(ka) & N_1(ka)+\frac{2}{\pi}K_1(ka) & -I_1(ka) \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой характеристическое уравнение, корни которого $(ka)_n = \beta_n$ связаны с резонансными частотами системы формулой

$$\omega_n = \sqrt{\frac{S}{\rho h}} \cdot \frac{\beta_n^2}{a^2}. \tag{11}$$

Здесь индекс n указывает на номер резонанса и соответствует числу узловых окружностей на диске.

Рассмотрим несколько подробнее вопрос о возможном характере импедансной нагрузки $\overline{Z}$. Выше мы предполагали, что она может быть произвольной в том числе и комплексной (при наличии потерь в ней). В последнем случае разонансные частоты диска также можно представить в виде



Фиг. 2

комплексных величин, мнимая часть которых определит декремент затухания всей системы. Изложенным методом можно, например, найти резонансные частоты 1) диска с закрепленной в его центре массой; 2) диска с упругим закреплением его центра; 3) системы, состоящей из двух дисков, жестко связанных друг с другом центрами; 4) системы, состоящей из диска и стержня, закрепленного в его центре и совершающего продольные или изгибные колебания и так далее.

В качестве примера разберем случай колебаний диска с закрепленной в его центре инерционной нагрузкой. Для этого случая имеем: $\overline{Z} = -i\omega m$, где m — масса нагрузки; при этом, как легко показать, второй член первой строки детерминанта $\frac{8Sk^2}{i\omega\overline{Z}} = \frac{\gamma}{(ka)^2}$, где $\gamma = \frac{8}{\pi}\frac{M}{m}$, а M — масса диска.

Уравнение (10) при $\gamma = \infty$ превращается в уравнение для определения резонансных частот ненагруженного диска [1]; при $\gamma = 0$ — в уравнение для диска с жестко закрепленным центром.

Ограничимся, далее, только случаем сравнительно больших номеров n и, следовательно, больших значений β_n, таких, что в уравнении (10) можно было бы все цилиндрические функции заменить их асимптоти-

ческими разложениями. После некоторых преобразований мы получаем уравнение для определения величин β_n:

$$-\operatorname{ctg}\beta_n = \gamma / \beta_n^2. \tag{12}$$

Это уравнение можно решить графическим методом. На фиг. 2 приведено качественное решение этого уравнения для значения параметра $\gamma = 250$ для $\beta_n > 3\pi$. Из фиг. 2 видно, что при $\gamma = 0$ (закрепленный центр) корни этого уравнения имеют значения $\beta_n = (n + {}^1/_2)\pi$, а при $\gamma = \infty$ (свободный центр) — $\beta_n = n\pi$. При некотором произвольном $\gamma_0 (0 < \gamma_0 < \infty)$ значения β_n лежат между этими двумя значениями: $n\pi < \beta_n < (n + {}^1/_2)\pi$, откуда видно, что резонансная частота диска с массовой нагрузкой, как и следовало ожидать, несколько ниже резонансной частоты ненагруженного диска. Интересно отметить, что сколь бы ни была мала масса нагрузки в сравнении с массой диска при достаточно высоких частотах всегда можно считать центр диска жестко закрепленным, так как при $\beta_n^2 \gg \gamma$ корни уравнения (12) будут определяться формулой $\beta_n \cong n\pi$, что соответствует жесткому закреплению центра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука, т. 1. М, 1955.
2. Л. М. Бреховских. Распространение волн изгиба по пластинкам. Ж. техн. физ., 1944, 14, 9, 569—576.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
19 ноября 1959 г.