АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI • 1960 Вып. 4

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Фэн Шао-сун

Рассмотрена задача об отражении волны конечной амплитуды в случае, когда она падает на стенку под углом $\pi/4$. Результаты, полученные методом последовательных приближений с точностью до второго приближения включительно, показывают: 1) возникновение волны удвоенной частоты, амплитуда которой нарастает с расстоянием; эта волна отражается по законам линейной акустики; 2) возникновение волны без нарастания амплитуды с частотой 2 ω, имеющей цилиндрическую симметрию.

Отражения плоских волн от жесткой стенки описываются, вообще говоря, двухмерными уравнениями. Как известно, решение задачи в двух измерениях на основе общей теории гидродинамики весьма сложно [1]. Однако, если мы полагаем, что амплитуда волны не слишком велика, задача распространения волн может быть рассмотрена методом последовательных приближений. Для простоты рассмотрим отражение волны в том случае, когда она падает на стенку под углом $\pi/4$; тогда отраженная волна будет перпендикулярна к падающей. Это обстоятельство позволит нам изменить постановку задачи. Рассмотрим тот случай, когда на положительных полуосях x и y расположены полубесконечные пластинки, колеблющиеся по синусоидальному закону. Тогда вдоль x и y будут распространяться две волны под прямым углом друг к другу. Очевидно, что если мы теперь проведем биссектрису этого угла, то картина распространения волн в обеих половинах этого угла эквивалентна картине отражения волны от стенки под углом $\pi/4$.

Исходя из уравнения Эйлера и уравнения непрерывности и считая газ идеальным, напишем уравнения 1-го и 2-го порядка для потенциала φ [2]:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = \frac{\gamma-1}{c_0^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial t}\right), \tag{2}$$

где c_0—скорость звука в невозмущенной среде, а индексы 1 и 2 обозначают величины 1-го и 2-го порядка соответственно.

Ищем сначала решение для следующих начальных и граничных условий:

$$x = 0 \quad \varphi_1 = A\sin\omega t, \qquad y = 0 \quad \varphi_1 = A\sin\omega t,$$
$$t < 0 \quad \varphi_1 = 0, \qquad \text{все } x,\ y \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь A — амплитуда волны, ω — круговая частота. В первом приближении решение будет

$$\varphi_1 = A\{\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - ky)\}. \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в уравнение (2), мы получаем

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = \tag{5}$$
$$= -A_1\{\sin 2(\omega t - kx) + \sin 2(\omega t - ky)\} - A_2\sin(2\omega t - kx - ky),$$

где $A_1 = A^2\omega^3(\gamma+1)/2c_0^2$, $A_2 = A^2\omega^3(\gamma-1)/c_0^2$. Начальное условие для уравнения (5)

$$t < 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \text{все } x, \; y \geqslant 0, \tag{6}$$

а граничное условие

$$x = 0, \quad \partial\varphi_2/\partial x = 0,$$

$$y = 0, \quad \partial\varphi_2/\partial y = 0, \tag{7}$$

так как мы предположили, что пластины колеблются по синусоидальному закону.

Уравнение (5) — линейное дифференциальное уравнение, оно эквивалентно трем следующим уравнениям с начальными и граничными условиями (6) и (7):

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = A_1 \sin 2(\omega t - kx), \tag{5а}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = -A_1 \sin 2(\omega t - ky), \tag{5б}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = -A_2 \sin(2\omega t - kx - ky). \tag{5в}$$

Если решения уравнений (5а, 5б, 5в) обозначим через φ_{2a}, $\varphi_{2б}$ и $\varphi_{2в}$, то решение φ_2 для уравнения (5) будет

$$\varphi_2 = \varphi_{2a} + \varphi_{2б} + \varphi_{2в}. \tag{8}$$

Решения уравнений (5а) и (5б) легко получаются и имеют вид:

$$\varphi_{2a} = \frac{A_1}{4\omega c_0} x \sin 2(\omega t - kx) + \frac{A_1}{8\omega^2} \sin 2(\omega t - kx), \tag{9а}$$

$$\varphi_{2б} = \frac{A_1}{4\omega c_0} y \sin 2(\omega t - ky) + \frac{A_1}{8\omega^2} \sin 2(\omega t - ky). \tag{9б}$$

Для решения уравнения (5в) применим методы, используемые в задачах нестационарной дифракции в угловой области и представим решение в виде ряда [3]

$$\varphi_{2c} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(r, t) \cos 2m\vartheta, \tag{9}$$

причем

$$f_m(r, t) = (-1)^{m+1} a_m \{H_{2m}^{(1)}(\sqrt{2}\, kr)\, e^{i2\omega t} - J_{2m}(\sqrt{2}\, kr) \cos 2\omega t\} + + Ae^{i2\omega t} J_{2m}(\sqrt{2}\, kr) + I_m(r, t), \tag{10}$$

где $H_{2m}^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, J_{2m} — функция Бесселя, а

$$I_m(r, t) = (-1)^m a_m c_0 \omega \int_0^{\infty} \frac{J_{2m}\left(\frac{\sqrt{2}r}{c_0} p\right)}{p(p+\omega)} e^{-i2pt} dp, \tag{11}$$

причем

$$a_m = \frac{4(2m^2)}{c_0^2} A_2 \cos\frac{m\pi}{2}, \quad A = \frac{2}{3c_0^2} A_2 (1 - i).$$

Из вида функции $f_m(r, t)$ ясно, что при $t = 0$ в начале координат имеется цилиндрический источник. Член $I_m(r, t)$ описывает течение, возникающее в пространстве, которое, однако, убывает с течением времени (анализ показывает, что $J_m(r, t)$ монотонно убывает с увеличением времени). При больших t формулу (10) можно записать в виде

$$J_m(r, t) = (-1)^{m+1} a_m \{H_{2m}^{(1)}(\sqrt{2}\,kr)\, e^{i2\omega t} - J_{2m}(\sqrt{2}\,kr)\cos 2\omega t\} + \\ + A e^{i2\omega t} J_{2m}(\sqrt{2}\,kr) \qquad (12)$$

и

$$\varphi_2 = \frac{A_1}{4\omega c_0}\{x\cos 2(\omega t - kx) + y\cos 2(\omega t - ky)\} + \\ + \frac{A_1}{\delta\omega^2}\{\sin 2(\omega t - kx) + \sin 2(\omega t - ky)\} + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(r, t)\cos 2m\vartheta.$$

Таким образом, из вида φ_2 можно сделать вывод, что в случае наклонного падения явление отражения с учетом 2-го приближения имеет следующие особенности: 1) возникает волна удвоенной частоты, амплитуда которой нарастает по мере распространения ее от начала координат. Эта волна отражается по законам линейной акустики; 2) возникает волна без нарастания амплитуды с частотой 2ω, имеющая цилиндрическую симметрию.

При произвольном угле наклона уравнение второго порядка также можно разбить на три уравнения, два из которых описывают распространение вдоль направлений падающей и отраженной волн, а третье является уравнением взаимодействия этих волн, взятых в 1-м приближении. В этом случае картина отражения волны конечной амплитуды будет, в основном, аналогична вышеописанной.

Приношу глубокую благодарность Н. Н. Андрееву за полезные обсуждения, постоянное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант и Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
2. N. Andrejew. J. Phys. USSR, 1940, 2, 305.
3. Г. И. Петрашень, Б. Г. Николаев, Д. П. Коузов. Уч. зап. ЛГУ, 1958, 246, 1.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 марта 1960 г.