АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ, ИМЕЮЩЕМ ОТВЕТВЛЕНИЯ И ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ НА СТЕНКАХ

А. Д. Лапин

Рассмотрена задача о распространении звука в волноводе, имеющем на стенке объемный резонатор в виде камеры прямоугольного сечения. Звуковые поля в волноводе и в объемном резонаторе ищутся в виде разложения по соответственным собственным функциям. Сшиванием этих полей на границе волновода и резонатора получена бесконечная система алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Эта система уравнений решена численно редукционным методом для некоторых значений параметров волновода и резонатора. Найдены частотные характеристики волновода, имеющего резонатор, и оптимальные размеры объемного резонатора, при которых получается наибольшее отражение звука.

В последнее время в различных областях техники для уменьшения передачи шума по трубам часто используются резонансные акустические фильтры [1, 2]. Для конструирования таких фильтров нужно знать решение задачи о распространении звука в волноводе, имеющем на стенках объемные резонаторы различной формы. Эта задача была рассмотрена многими авторами методом электроакустических аналогий в предположении малости поперечных размеров волновода и объемных резонаторов по сравнению с длиной волны звука, распространяющегося в волноводе [3—10]. В том же случае, когда поперечные размеры волновода и резонатора не малы по сравнению с длиной волны, эта задача была решена только для волновода прямоугольного сечения и объемного резонатора в виде прямоугольного отростка [11]. В настоящей работе получено обобщение этого решения на случай, когда объемный резонатор представляет собой камеру прямоугольного сечения. На фиг. 1 представлено сечение волновода, имеющего такой объемный резонатор, координатной плоскостью z.

Выберем в качестве падающего поля нормальную волну

$$P_0(x, y, z) = e^{i\varkappa_{rs}x} \cos k_{ry} y \cos k_{sz} z, \tag{1}$$

где

$$k_{ry} = r\pi/b, \quad k_{sz} = s\pi/d, \quad \varkappa_{rs} = \sqrt{k^2 - k_{ry}^2 - k_{sz}^2},$$

d — линейный размер волновода по оси z. Найдем полное поле P в волноводе.

Обозначим дифрагированное поле в волноводе через p, а поле в камере — через p_1. Из условий непрерывности давления и нормальной составляющей скорости на границе волновода и камеры ($0<x<a$, $y=0$) следует, что поля p и p_1 удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$p(x, 0, z) = p_1(x, 0, z) - p_0(x, 0, z) \text{ при } 0 < x < a, \tag{2}$$

$$(\partial p/\partial y)_{y=0} = (\partial p_1/\partial y)_{y=0} \text{ при } 0 < x < a. \tag{3}$$

На других границах поля p и p_1 имеют нулевую нормальную скорость.

Дифрагированное поле p и поле в камере p_1 будем искать следующим образом. Вначале найдем звуковые поля в волноводе и в камере, создаваемые источниками нормальной скорости $f(x, z)$, распределенными по гладкой стенке $y = 0$ в интервале $0<x<a$. Эти поля будут автоматически удовлетворять граничному условию (3). Затем подберем функцию $f(x, z)$

так, чтобы удовлетворялось и граничное условие (2). Согласно теореме единственности построенные таким способом поля в волноводе и в камере будут тождественны искомым полям p и p_1.

Разложим функцию распределения источников нормальной скорости $f(x, z)$ в ряд Фурье:

$$f(x, z) = \sum_{n, q} M_{nq} \cos k_{nx} x \cos k_{qz} z, \tag{4}$$

где $k_{nx} = n\pi/a$. Поле в волноводе, создаваемое этими источниками, можно представить в виде *

$$p(x, y, z) = -\sum_{m, n, q} \frac{M_{nq}}{b\theta_m (k_{nx}^2 - \varkappa_{mq}^2)} \{2\cos(k_{nx}x) - e^{i\varkappa_{mq}x} +$$

$$+ (-1)^{n+1} e^{i\varkappa_{mq}a} e^{-i\varkappa_{mq}x}\} \cos(k_{my}y) \cos(k_{qz}z) \qquad \text{при } 0 < x < a, \tag{5}$$

$$p(x, y, z) = \sum_{m, q} A_{mq} e^{i\varkappa_{mq}x} \cos(k_{my}y) \cos(k_{qz}z) \qquad \text{при } x > a, \tag{6}$$

$$p(x, y, z) = \sum_{m, q} B_{mq} e^{-i\varkappa_{mq}x} \cos(k_{my}y) \cos(k_{qz}z) \qquad \text{при } x < 0. \tag{7}$$

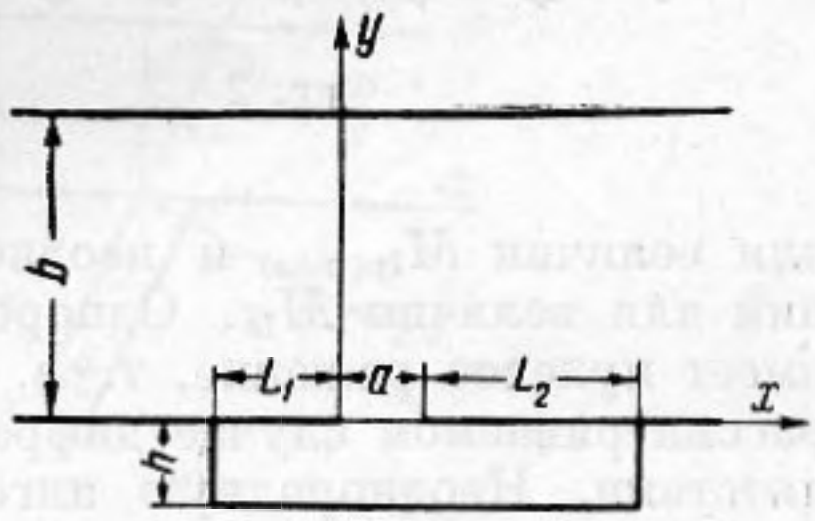
Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{mq} = \sum_{n} \frac{M_{nq}}{b\theta_m (k_{nx}^2 - \varkappa_{mq}^2)} \{1 + (-1)^{n+1} e^{-ia\varkappa_{mq}}\}; \tag{8}$$

$$B_{mq} = -\sum_{n} \frac{M_{nq}}{b\theta_m (k_{nx}^2 - \varkappa_{mq}^2)} \{1 + (-1)^{n+1} e^{ia\varkappa_{mq}}\}, \quad \theta_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Суммирование по m, n и q производится от 0 до ∞.

Таким образом, дифрагированное поле в волноводе, имеющем камеру, представлено в виде суперпозиции однородных и неоднородных (затухающих) нормальных волн для соответственного волновода без камеры. Если параметры волновода таковы, что $(m/b)^2 + (q/d)^2 \leqslant k^2/\pi^2$, то соответственная нормальная волна является однородной; в противном случае — неоднородной.



Фиг. 1

Вычисление поля в камере, создаваемого источниками нормальной скорости (4), производится аналогично вычислению поля в волноводе. Это поле можно представить в виде

$$p_1(x, y, z) = -\sum_{m, n, q} \frac{2\alpha_{mn} M_{nq}}{\theta_m (a + L_1 + L_2)} \frac{\cos\left[\sqrt{k^2 - \varkappa_{mx}^2 - k_{qz}^2}\,(h + y)\right]}{\sqrt{k^2 - \varkappa_{mx}^2 - k_{qz}^2} \sin\left[\sqrt{k^2 - \varkappa_{mx}^2 - k_{qz}^2}\,h\right]} \times$$

$$\times \cos[\varkappa_{mx}(L_1 + x)] \cos(k_{qz}z), \tag{10}$$

где $\varkappa_{mx} = m\pi/(a + L_1 + L_2)$,

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} \dfrac{a\theta_n}{2} \cos(k_{nx}L_1) & \text{при } m = \dfrac{(a + L_1 + L_2)}{a} n \\[2ex] \dfrac{\varkappa_{mx}}{\varkappa_{mx}^2 - k_{nx}^2} \{(-1)^n \sin[\varkappa_{mx}(L_1 + a)] - \sin[\varkappa_{mx}L_1]\} & \\[2ex] & \text{при } m \neq \dfrac{(a + L_1 + L_2)}{a} n. \end{cases}$$

* Метод нахождения этого поля аналогичен изложенному в работе [12].

Удовлетворим теперь граничному условию (2). Это можно сделать, подбирая соответствующим образом коэффициенты M_{nq}. Подставим (5) и (10) в (2), умножим обе части полученного соотношения на $\cos k_{lx}x \times \times \cos k_{pz}z$ и проинтегрируем по отверстию камеры. Тогда мы получим бесконечную систему алгебраических уравнений * для коэффициентов M_{lp}:

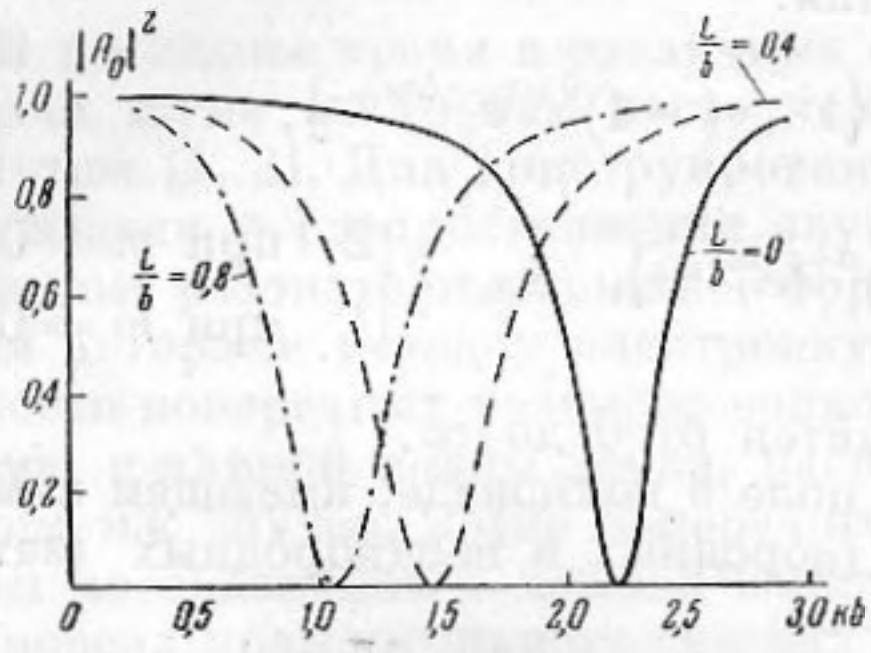
$$\sum_{m,n} \frac{M_{np}}{b\theta_m (k_{kx}^2 - \varkappa_{mp}^2)} \left\{ a\theta_l \delta_{l,n} + \frac{i\varkappa_{mp}}{(k_{lx}^2 - \varkappa_{mp}^2)} ([1 + (-1)^{l+n}] - \right.$$

$$\left. - [(-1)^l + (-1)^n] e^{i\varkappa_{mp}a}) \right\} = \frac{i\varkappa_{rs}\delta_{s,p}}{(k_{lx}^2 - \varkappa_{rs}^2)} \{(-1)^l e^{i\varkappa_{rs}a} - 1\} +$$

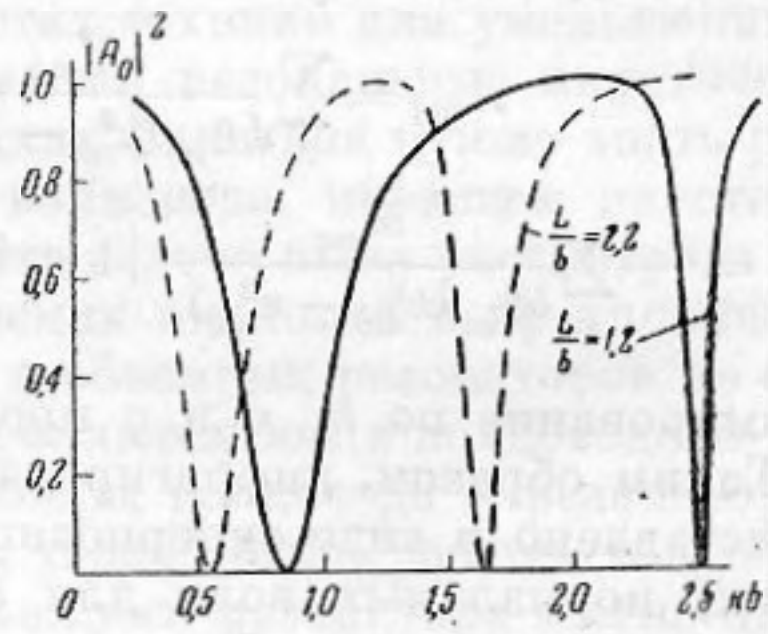
$$+ \sum_{m,n} \frac{2\alpha_{mn}\alpha_{ml} M_{np}}{\theta_m (a + L_1 + L_2)} \frac{\operatorname{ctg} [\sqrt{k^2 - \varkappa_{mx}^2 - k_{pz}^2} h]}{\sqrt{k^2 - \varkappa_{mx}^2 - k_{pz}^2}}, \tag{11}$$

где $\delta_{s,p} = \begin{cases} 1 \text{ при } s = p \\ 0 \text{ при } s \neq p. \end{cases}$

Эта система уравнений распадается на две независимые бесконечные системы уравнений — однородную алгебраическую систему уравнений



Фиг. 2



Фиг. 3

для величин $M_{lp(p\neq s)}$ и неоднородную алгебраическую систему уравнений для величин M_{ls}. Однородная алгебраическая система уравнений имеет нулевое решение, т. е. $M_{lp(p\neq s)} \equiv 0$. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае дифракция звука происходит на плоском препятствии. Неоднородную алгебраическую систему уравнений для M_{ls} удобно решать численно редукционным методом [13]. Подставляя полученные решения M_{lp} в (5)—(9), получим дифрагированное поле p и, следовательно, найдем полное поле $P = p_0 + p$. Очевидно, что амплитуды нормальных волн $A_{mq(q\neq s)}$ и $B_{mq(q\neq s)}$ будут тождественно равны нулю, т. е. поля p и P будут иметь ту же зависимость от координаты z, что и поле p_0.

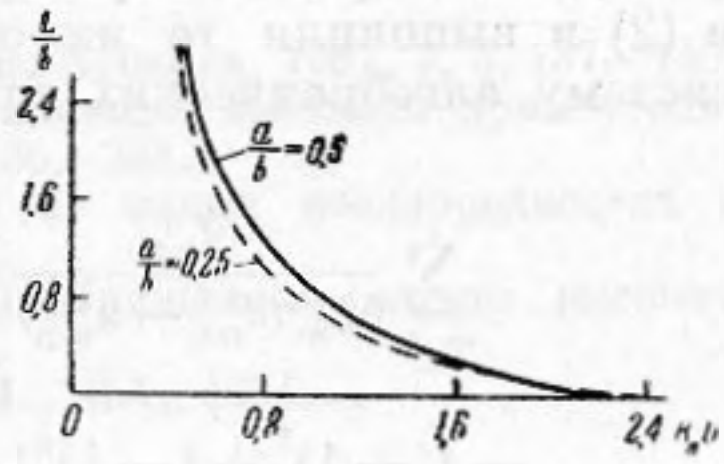
Ниже приведены графики, рассчитанные указанным способом для некоторых значений параметров волновода и резонансной камеры. Для определенности все эти графики рассчитаны для симметричной камеры, т. е. при условии $L_1 = L_2 \equiv L$. В качестве падающего поля везде выбрана нулевая нормальная волна.

На фиг. 2 и 3 представлены графики частотной зависимости квадрата амплитуды $|A_0|^2$ прошедшей нулевой нормальной волны, рассчитанные по точной теории при $\frac{a}{b} = \frac{h}{b} = 0,5$ для различных значений параметра

* При $L_1 = L_2 = 0$ эта система уравнений переходит в соответственную систему уравнений, полученную в работе [11].

L/b. Из этих графиков можно определить оптимальное значение параметра L/b, при котором происходит наиболее эффективное отражение звука заданной частоты ω_0. На фиг. 4 приведен график зависимости оптимальной величины параметра L/b в функции $k_0 b = \frac{\omega_0}{c} b$. Сплошная и пунктирная линии на этом графике относятся соответственно к случаям $a/b = 0{,}5$ и $a/b = 0{,}25$.

На фиг. 5 приведен график относительной ширины частотной кривой $\Delta\omega/\omega_0$ на уровне 0,5 для квадрата амплитуды прошедшей нулевой нормальной волны в функции $k_0 b$. Этот график показывает быстрое уменьшение относительной ширины частотной кривой при повышении частоты звука, который нужно отразить.

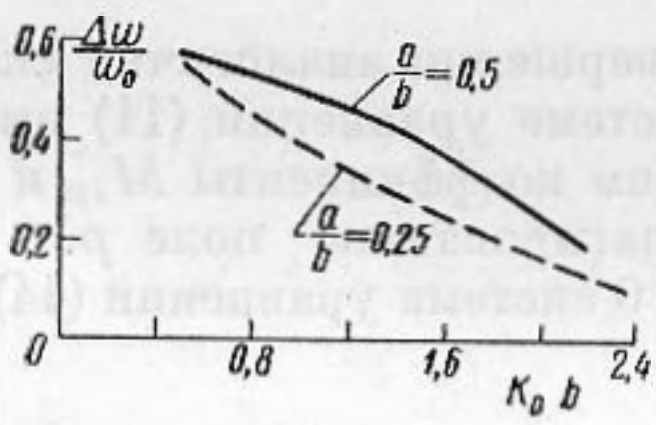


Фиг. 4

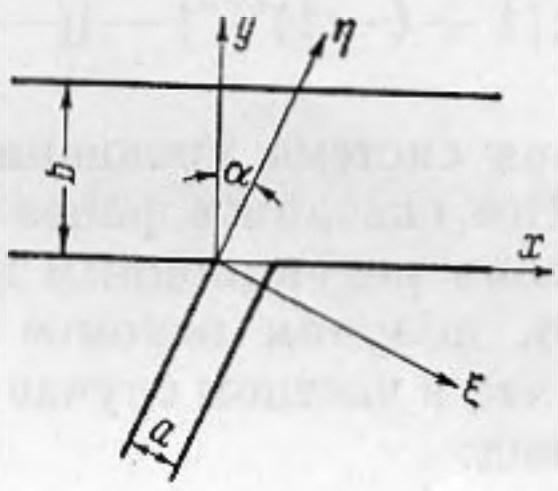
Последние два графика могут быть использованы для выбора параметров камеры при проектировании резонансных отражателей («глушителей») звука на заданную частоту.

Вышеизложенный метод нахождения дифрагированного поля в волноводе можно применить и к другим более сложным дифракционным задачам. Рассмотрим этим методом задачу о распространении звука в волноводе, имеющем ответвление (фиг. 6). В качестве падающего поля здесь, как и ранее, выберем нормальную волну (1).

В соответствии с предыдущим, вначале найдем поле p_1 в ответвлении, создаваемое источниками нормальной скорости (4), распределенными по гладкой стенке $y = 0$ в интервале $0 < x < a$. Что же касается соответственного поля в волноводе, то оно, как и прежде, выражается формулами (5)— (9).



Фиг. 5



Фиг. 6

Поле p_1 будем искать следующим образом. Рассмотрим бесконечный волновод, совпадающий при $y<0$ с ответвлением. Найдем поле в этом волноводе, создаваемое источниками объемной скорости $F(x, y, z) = 2f(x, z)\,\delta(y)$, где функция $f(x, z)$ определяется формулой (4). При $y<0$ это поле будет совпадать с искомым полем p_1.

Поле в волноводе, создаваемое распределенными источниками объемной скорости, было вычислено в работе [12]. Используя результаты этой работы, получим

$$p_1(\xi, \eta, z) = \sum_{m, n, q} \frac{2 \sin \alpha M_{nq}}{\theta_m a \{[k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mq}^2 \sin^2 \alpha]^2 - 4k_{nx}^2 k_{mx}^2\}} \times$$
$$\times \left\{4k_{nx}k_{mx} \sin\left(\frac{k_{nx}\eta}{\sin\alpha}\right) \sin\left(\frac{k_{mx}\eta}{\sin\alpha}\right) + (k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mq}^2 \sin^2\alpha) \times\right.$$
$$\times \left[2\cos\left(\frac{k_{nx}\eta}{\sin\alpha}\right)\cos\left(\frac{k_{mx}\eta}{\sin\alpha}\right) + (-1)^{n+m+1} e^{ik_{\eta mq}\sin\alpha a} e^{-ik_{\eta mq}\eta} - \right. \tag{12}$$
$$\left.\left. - e^{ik_{\eta mq}\eta}\right]\right\} \cos(k_{m\xi}\xi)\cos(k_{qz}z) \text{ при } 0 < \eta < a\sin\alpha;$$

$$p_1(\xi, \eta, z) =$$

$$= \sum_{m,n,q} \frac{2\sin\alpha M_{nq}}{\theta_m a} \frac{[k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mq}^2 \sin^2\alpha]\,[1 + (-1)^{n+m+1} e^{ik_{\eta mq} a \sin\alpha}]}{\{[k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mq}^2 \sin^2\alpha]^2 - 4k_{nx}^2 k_{mx}^2\}} \times$$

$$\times e^{-ik_{\eta mq}\eta} \cos(k_{m\xi}\xi)\cos(k_{qz} z) \text{ при } \eta < 0, \tag{13}$$

где $k_{m\xi} = m\pi / a\cos\alpha$, $k_{\eta mq} = \sqrt{k^2 - k_{m\xi}^2 - k_{qz}^2}$.

Удовлетворим теперь граничному условию (2). Подставляя (5) и (12) в (2) и выполняя те же операции, что и ранее, получим бесконечную систему алгебраических уравнений для коэффициентов M_{lp}:

$$\sum_{m,n} \frac{M_{np}}{b\theta_m (k_{nx}^2 - \varkappa_{mp}^2)} \Big\{\theta_l a \delta_{l,n} + \frac{i\varkappa_{mp}}{(k_{lx}^2 - \varkappa_{mp}^2)} ([1 + (-1)^{l+n}] -$$

$$- [(-1)^l + (-1)^n]\, e^{i\varkappa_{mp} a})\Big\} = \frac{i\varkappa_{rs}\,\delta_{s,p}}{(k_{lx}^2 - \varkappa_{rs}^2)} [(-1)^l e^{i\varkappa_{rs} a} - 1] -$$

$$- \sum_{m,n} \frac{\sin\alpha M_{np}}{2\theta_m [(k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mp}^2 \sin^2\alpha)^2 - 4k_{nx}^2 k_{mx}^2]} \Big\{2k_{nx} k_{mx} [\delta_{0,\, n-2m+l} +$$

$$+ \delta_{0,\, n-2m-l} - \delta_{0,\, n+2m+l} - \delta_{0,\, n+2m-l}] + (k_{nx}^2 + k_{mx}^2 - k_{\eta mp}^2 \sin^2\alpha) \times$$

$$\times \Big([\delta_{0,\, n-2m+l} + \delta_{0,\, n-2m-l} + 2\theta_l \delta_{l,n} + \delta_{0,\, n+2m+l} + \delta_{0,\, n+2m-l}] + \tag{14}$$

$$+ \frac{i4k_{\eta mp}\sin\alpha}{a} \frac{[k_{mx}^2 + k_{lx}^2 - k_{\eta mp}^2 \sin^2\alpha]}{[(k_{mx}^2 - k_{lx}^2 - k_{\eta mp}^2 \sin^2\alpha)^2 - 4k_{mx}^2 k_{lx}^2]} \times$$

$$\times \{[1 + (-1)^{l+n}] - [(-1)^{m+n} + (-1)^{m+l}]\, e^{ik_{\eta mp}\sin\alpha a}\}\Big)\Big\}.$$

Полученная система уравнений совершенно аналогична системе уравнений (11). Все сказанное ранее о системе уравнений (11) имеет место и здесь. Вычисляя редукционным методом коэффициенты M_{lp} и подставляя их в (5)—(9), получим искомое дифрагированное поле p.

Заметим, что в частном случае $\alpha = 0$ система уравнений (14) принимает следующий вид:

$$a\theta_l \Big\{\frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_{lx}^2 - k_{pz}^2}} - \frac{i}{b} \sum_m \frac{1}{\theta_m (k_{lx}^2 - \varkappa_{mp}^2)}\Big\} M_{lp} =$$

$$= \frac{\varkappa_{rs}\,\delta_{s,p}}{(k_{lx}^2 - \varkappa_{rs}^2)} [(-1)^l e^{i\varkappa_{rs} a} - 1] -$$

$$- \sum_{m,n} \frac{\varkappa_{mp} M_{np}}{b\theta_m (k_{nx}^2 - \varkappa_{mp}^2)(k_{lx}^2 - x_{mp}^2)} \{[1 + (-1)^{l+n}] - [(-1)^l + (-1)^n]\, e^{i\varkappa_{mp} a}\}. \tag{15}$$

Аналог алгебраической системы уравнений (15) для электромагнитного случая был получен ранее в работе [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Devis and others. Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine-exhaust muffler design. NACA Rep., 1954, 1192.
2. Е. Я. Юдин. Исследование шума вентиляторных установок и методов борьбы с ним. М., Оборонгиз, 1958.

3. G. W. Stewart. Acoustic wave filters. Phys. Rev., 1922, **20**, 528—551.
4. G. W. Stewart. Acoustic wave filters: attenuation and phase factors. Phys. Rev., 1924, **23**, 520—524.
6. G. W. Stewart. Acoustic wave filters: an extension of the theory. Phys. Rev., 1925, **25**, 90—98.
6. W. P. Mason. A study of the regular combination of acoustic elements, with application to recurrent acoustic filters, tapered acoustic filters, and horns. Bell. Syst. Tech. J., 1927, **7**, 258—294.
7. G. W. Stewart, R. B. Lindsay. Acoustics. N. Y., 1930.
8. E. Waetzmann, F. Noether. Über akustische Filter. Ann. Phys., 1932, **13**, 212—228.
9. W. P. Mason. Electromechanical transducers and wave filters. D. van Nostrand Comp. Inc., N. Y., 1946.
10. W. K. R. Lippert. Sound propagation in ducts. Acustica, 1957, **7**, 3, 137—145.
11. А. Д. Лапин. О распространении звука в волноводе, имеющем прямоугольные канавки на стенках. Акуст. ж., 1960, **6**, 2, 236—243.
12. М. А. Исакович. Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе. Акуст. ж., 1957, **3**, 1, 37—45.
13. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГИТТЛ, 1949.
14. Л. Левин. Современная теория волноводов. М., ИЛ, 1954.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 сентября 1960 г.