АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 3

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН НАД ПЛОСКОЙ ГРЕБЕНЧАТОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Д. Хаскинд

В статье [1] рассматривается одна из приближенных постановок задачи о возбуждении поверхностных двумерных звуковых волн над плоской прямолинейной гребенчатой структурой. Решение этой задачи отыскивается при помощи интегральных разложений Фурье и последующих асимптотических оценок. Между тем, метод, вытекающий из свойств специальной функциональной комбинации, развитый в [2, 3], позволяет установить простую и эффективную форму решения не только в двумерном случае, но также и в более сложном трехмерном случае. Дальнейшее изложение иллюстрирует высказанные соображения.

1. Пусть функция $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющая волновому уравнению, является звуковым потенциалом поля над импеданцной плоскостью $z = 0$, где фактор времени $\exp i\omega t$ опускается. Тогда, как известно, на импеданцной плоскости $z = 0$ имеем условие:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \quad (p > 0)\,. \tag{1}$$

При этом для частой гребенчатой структуры $p = k\,\mathrm{tg}\,kl$, где l — высота гребенки, k — волновое число в свободном пространстве.

Следуя [2, 3], введем в рассмотрение специальную функциональную комбинацию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}\,, \tag{2}$$

где функция f, так же как и φ, удовлетворяет волновому уравнению и в соответствии с (1) условию

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \tag{3}$$

позволяющему продолжить функцию f в нижнее полупространство четным образом. Вследствие этого функция f является регулярной и однозначной во всем пространстве вне поверхности $S + S^*$, где внутри поверхности S расположены источники поля, а S^* — зеркальное отражение поверхности S в нижнем полупространстве.

Если функция $f(x, y, z)$ определена, то, как показано в [2, 3], обратный переход к функции $\varphi(x, y, z)$ с учетом асимптотики определяется единственным образом и в трехмерном случае мы имеем одну из следующих формул перехода:

$$\varphi = e^{-pz}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{p\zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta}\,d\zeta + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{ip}{4}\int\limits_{S+S^*}\left(\frac{\partial f}{\partial n}g_1 - f\frac{\partial g_1}{\partial n}\right)dS, \tag{4}$$

$$g_1 = e^{-p(z-\zeta)}H_0^{(2)}(hr_1) \quad (r_1 = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2},\ h^2 = k^2 + p^2), \tag{5}$$

где $H_0^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля 2-го рода и интегрирование в первой из формул (4) проводится вдоль прямой $(-\infty, z)$, не пересекающей поверхность $S + S^*$, причем функция φ_0 в этой формуле определяет поверхностные волны, возбуждаемые на импеданцной плоскости $z = 0$.

Для двумерного поля, возбуждаемого источниками, заключенными внутри цилиндрической поверхности S, образующая которой параллельна оси x, функции φ и f зависят только от y и z и формулы перехода (4) и (5) принимают вид:

$$\varphi = e^{-pz}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{p\zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta}d\zeta + B(\pm h, p)\,e^{-pz\mp ihy}, \tag{6}$$

$$B(\pm h, p) = \frac{ip}{2h}\int\limits_{L+L^*} e^{pz\pm ihy}\left[\frac{\partial f}{\partial n} - f\left(\pm ih\cos(n, y) + p\cos(n, z)\right)\right]dl, \tag{7}$$

где $L+L^*$ — поперечный контур цилиндрической поверхности $S+S^*$; верхний знак берется для точек, расположенных правее контура $L+L^*$, а нижний — для точек, находящихся левее его. Как видно, функция $B(\pm h, p)$ представляет собой комплексную амплитуду плоских поверхностных волн, расходящихся по обе стороны от контура L.

2. Рассмотрим плоскую прямолинейную гребенчатую структуру, на участке $(-a, a)$ которой расположены возбуждающие элементы при $z=-l$. В этом случае функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = v(y)\sec kl \ \text{ при } z = 0, \tag{8}$$

где $v(y)$ — комплексная амплитуда нормальной скорости возбуждающих элементов, отличная от нуля только при $|y| < a$.

Очевидно, что функция $f(y, z)$ сразу определяется и мы имеем

$$f(y) = \frac{i}{2}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\partial f^+}{\partial z}H_0^{(2)}\left(k\left((y-s)^2+z^2\right)^{1/2}\right)ds \quad \left(\frac{\partial f^+}{\partial z} = v\ \sec\ kl\right). \tag{9}$$

В то же время, стягивая контур $L+L^*$ к отрезку $(-a, a)$ оси y, находим

$$B(\pm h, p) = \frac{ip}{h}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\partial f^+}{\partial z}\,e^{\pm ihy}\,dy \tag{10}$$

и, таким образом, при помощи (6), (9) и (10) получаем полное и, вместе с тем, простое решение этой задачи при произвольном распределении $v(y)$.

Пусть теперь импедансная плоскость реализуется при помощи кольцевой гребенчатой структуры. Тогда при тех же предпосылках легко установить соотношение (8), где функция v отлична от нуля только на S_0. Здесь также функция $f(x, y, z)$ легко определяется:

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0}\frac{\partial f^+}{\partial z}\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS_0\,(r^2 = r_1^2 + z^2,\ r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2). \tag{11}$$

Стягивая затем поверхность $S+S^*$ к S_0, получаем

$$\varphi_0 = \frac{ip}{2}\,e^{-pz}\int\limits_{S_0}\frac{\partial f^+}{\partial z}H_0^{(2)}(hr_1)\,dS_0\,. \tag{12}$$

Асимптотика этого выражения приводит к соотношению:

$$\varphi_0 = \frac{i\,pQ(h,\ \theta)}{(2\pi\, hr_0)^{1/2}}\,e^{-pz-i\,(hr_0-\pi/4)}\left(r_0 = (x^2+y^2)^{1/2}, \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}\right), \tag{13}$$

$$Q(h,\theta) = \int\limits_{S_0}\frac{\partial f^+}{\partial z}e^{ih\,(x\cos\theta\, +\, y\sin\theta)}\,dS_0\,, \tag{14}$$

где $Q(h, \theta)$ — асимптотическая характеристика возбуждаемых поверхностных волн.

В качестве примера рассмотрим простейшее осесимметричное возбуждение, полагая, по аналогии с двумерным случаем [1]

$$v = v_0 J_0(\alpha r/a) \text{ при } 0 < r < a \text{ и } v = 0 \text{ при } r > a, \tag{15}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка и α — корень уравнения $J_1(\alpha) = 0$. Такое задание функции v соответствует колебаниям тонкой круговой пластинки в свободном пространстве, защемленной при $r = a$, и может рассматриваться как первое приближение для нормальной скорости v в данной задаче.

Учитывая равенства

$$\int_0^{2\pi} e^{ih\cos u}\,du = 2\pi J_0(hr), \quad \int_0^1 xJ_0(\alpha x)\,J_0(\beta x)\,dx \underset{(\beta=ha)}{=} \frac{\beta J_1(\beta)\,J_0(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}, \tag{16}$$

получаем

$$Q = 2\pi v_0 a^2 \sec kl \,\frac{\beta J_1(\beta)\,J_0(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}, \tag{17}$$

при этом при «резонансе» ($\beta \to \alpha$) находим предельное выражение:

$$Q = \pi v_0 a^2 \sec kl J_0^2(\alpha). \tag{18}$$

3. Коснемся еще электромагнитной аналогии. При возбуждении двумерного поля E-волн над импеданцной плоскостью имеем граничное условие:

$$E_y = i\rho_0 Z H_x \text{ при } z = 0\left(\rho_0 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 120\,\pi\ \text{ом}\right), \tag{19}$$

где для гребенчатой структуры $Z = \operatorname{tg} kl$.

Электромагнитное поле, возбуждаемое над плоскостью $z = 0$, определим при помощи соотношений $\mathbf{E} = -ik\rho_0 \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_m$, $\mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_m + k^2\mathbf{\Pi}_m$, где магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi}_m$ ориентируем вдоль оси x, полагая $\mathbf{\Pi}_m = \varphi(y, z)\,\mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^0$ — единичный вектор оси x) и в результате этого получаем

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0(\operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{x}^0), \quad H_x = k^2\varphi, \quad H_y = H_z = 0. \tag{20}$$

Скалярная функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению и, согласно (19) и (20), граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0\ (p = kZ). \tag{21}$$

Пусть участок $(-a, a)$ гребенчатой структуры является открытым, на котором приложено заданное поле $E_y = E_s(y)$ при $z = -l$. Тогда, принимая, как и обычно, что поле в канавках при $-l < z < 0$ характеризуется функцией $\varphi_i = C_1 \exp ikz + C_2 \exp(-ikz)$, нетрудно установить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = \frac{i}{k\rho_0} E_s \sec kl \quad \text{при } z = 0\,|y| < a. \tag{22}$$

Если же мы имеем круговую кольцевую гребенчатую структуру, то в этом трехмерном случае импеданцные граничные условия в полярной системе координат имеют вид:

$$E_r = -i\rho_0 Z H_\theta, \quad E_\theta = i\rho_0 Z H_r \quad \text{при } z = 0. \tag{23}$$

Поле Е-волн определяем при помощи электрического вектора Герца $\Pi_e = \varphi(x, y, z)\,\mathbf{z}^0$ ($\mathbf{z}^0$ — единичный вектор оси z) и мы находим

$$H_r = \frac{ik}{\rho_0}\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}, \quad H_0 = -\frac{ik}{\rho_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad H_z = 0,$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \quad E_0 = \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \quad E_z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi. \tag{24}$$

При наличии открытой части ($a < r < b$) гребенчатой структуры, на которой при $z = -l$ задано поле $E_r^i\,(E_\theta^i = 0)$, т. е. задано значение $v_i = \partial\varphi_i / \partial z$, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = v_i \sec kl \text{ при } z = 0,\ a < r < b \text{ и } v_i = 0 \text{ при } r > b \tag{25}$$

$$(p = kZ = k\,\mathrm{tg}\,kl).$$

Таким образом, мы видим, что в электромагнитном варианте такая приближенная постановка соответствует волноводному возбуждению поверхностных волн над гребенчатой структурой, причем открытая часть плоского или круглого волновода «охвачена» гребенкой и в качестве первого приближения структура поля у открытого конца принимается такой же, как и в бесконечном волноводе (приближение Кирхгофа).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуань Дин-хуа. К теории возбуждения поверхностных звуковых волн. Акуст. ж., 1961, 7, 2, 181—184.
2. М. Д. Хаскинд. Распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 464—471.
3. М. Д. Хаскинд. Возбуждение поверхностных электромагнитных волн на плоских диэлектрических покрытиях. Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 188—197.

Одесский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 10 октября 1960 г.