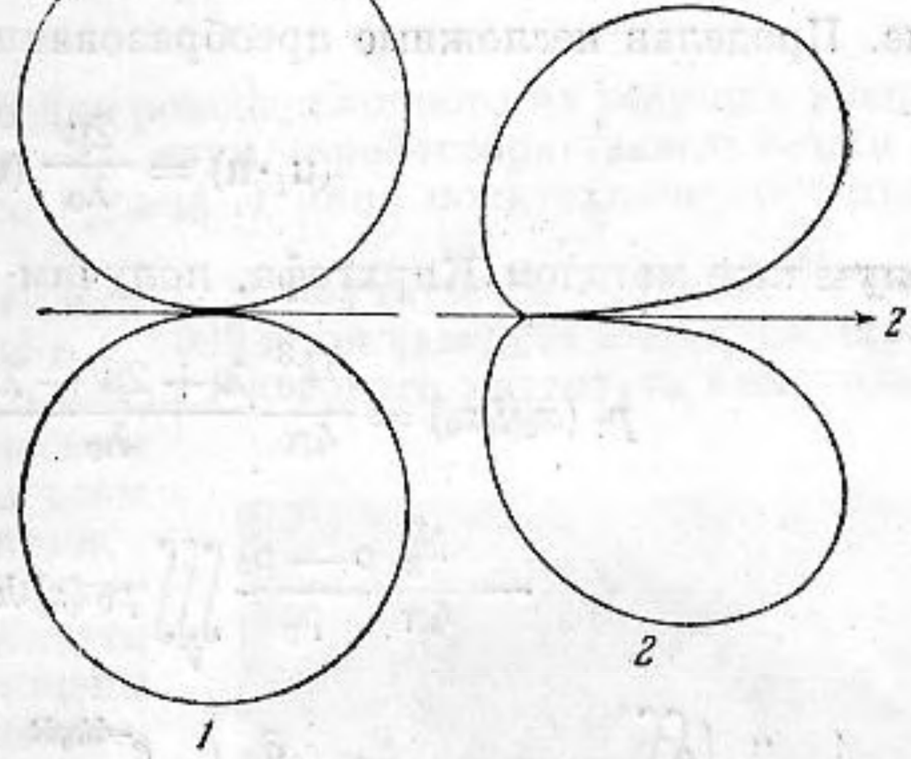
РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ТЕЛАХ С МАЛЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА, НАХОДЯЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ

И. А. Чабан

С точки зрения гидроакустики интересно знать, как рассеивают звук биологические объекты: рыбы, медузы и так далее. Плотность и сжимаемость этих биологических объектов отличается лишь на малую величину от соответственных параметров воды, но, в отличие от воды, они обладают также и небольшой сдвиговой упругостью. Рассеяние будет определяться, таким образом, не только отличием плотности и сжимаемости, но и малым модулем сдвига.

Задачу о рассеянии в данном случае нельзя решать методом малых возмущений, так как сдвиговые напряжения не малы по сравнению с давлением в падающей волне. Однако ее можно решить в предположении малости длины волны сдвига по сравнению с размерами объекта, что обычно выполняется для ультразвуковых частот, наиболее интересных с точки зрения рассеяния. Кроме того, поскольку затухание сдвиговых волн в живых тканях велико, то можно применить приближенный метод, аналогичный методу Кирхгофа [1, 2], а именно, граничные условия для сдвиговых волн в каждой точке поверхности тела можно писать так, как если бы граница была плоской. Оказывается, что в этом случае рассеянное поле можно выразить в виде объемных интегралов, пропорциональных малым величинам $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ и $\frac{\lambda+2\mu-\lambda_0}{\lambda_0}$ и поверхностного интеграла, пропорционального малой величине μ/λ_0. Здесь λ, μ — постоянные Ламэ, величины с индексом 0 относятся к жидкости, величины без индекса относятся к биологическому объекту.



Пусть на объект падает плоская гармоническая волна, давление в которой равно $p_0(z) = p_0 e^{-ik_0 z}$, где k_0 — волновое число в жидкости. Смещение в такой волне равно $\mathbf{v}_0(z) = v_0(z)\,\mathbf{e}_z = v_0 \mathbf{e}_z e^{-ik_0 z}$, где e_z — единичный вектор в направлении оси z.

Представим давление и смещение в жидкости в виде $p(\mathbf{r}) = p_0(z) + p_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(z) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r})$, где $p_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ — давление и смещение, создаваемое рассеянным полем. Аналогично представим смещение в упругом теле в форме $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(z) + \mathbf{u}_1(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ — смещение, дополнительное к смещению в падающей волне. $\mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ можно представить как $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{e_1}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_t(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}_{e_1}(\mathbf{r})$ — продольная часть дополнительного смещения в упругом теле, $\mathbf{u}_t(\mathbf{r})$ — поперечная часть.

Уравнение движения в жидкости имеет следующий вид:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} + k_0^2\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

Уравнение для продольной части смещения в упругом теле запишем следующим образом:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_l + k_0^2\mathbf{u}_l = -4\pi\mathbf{Q}_l, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{Q}_l = \frac{k_0^2}{4\pi}\left(-\frac{\lambda+2\mu-\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)\mathbf{v}_0. \tag{3}$$

Применим формулу Грина [3] к уравнению (1). Это дает

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi k_0^2}\iint\limits_S \operatorname{div}\mathbf{v}_1(\mathbf{r})\operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik_0R}}{R}\right)dS + {}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S (\mathbf{v}_1(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n})\operatorname{grad}\left(\frac{e^{-ik_0R}}{R}\right)dS, \tag{4}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$, $R = \sqrt{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2}$, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности упругого тела. Используем теперь граничные условия, т. е. равенство нормальных смещений и напряжений на границе между жидкостью и упругим телом.

$$(\mathbf{v}_1\mathbf{n}) = (\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}), \tag{5}$$

$$\lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{6}$$

Так как напряжения, создаваемые продольными и поперечными смещениями $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$, одного порядка, и поперечные колебания происходят под углом $\sqrt{\mu/\lambda}$ к нормали, то второе граничное условие можно записать следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = \operatorname{div}\mathbf{u}_1 + \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}\operatorname{div}\mathbf{v}_0(z) - \frac{2\mu}{\lambda_0} ik_0\cdot n_z^2 v_0(z). \tag{7}$$

Подставив выражения (5), (7) в формулу (4) и применив формулу Грина [3] к уравнению (2), мы можем часть поверхностных интегралов в (4) заменить через объемные. Проделав несложные преобразования и подставив вместо $(\mathbf{u}_l\cdot\mathbf{n})$ выражение

$$(\mathbf{u}_l\cdot\mathbf{n}) = \frac{2\mu}{\lambda_0}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_0(z))(1-n_z^2), \tag{8}$$

полученное методом Кирхгофа, получим

$$p_1(x_0y_0z_0) = -\frac{ik_0^3}{4\pi}\frac{\lambda+2\mu-\lambda_0}{\lambda_0}\iiint\limits_V p_0(z)\cdot h_0(k_0R)\,dxdydz -$$

$$-\frac{k_3^0}{4\pi}\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\iiint\limits_V p_0(z)\,h_1(k_0R)\,P_1(\cos\theta)\,dxdydz - \tag{9}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda_0}\left\{\oiint\limits_S p_0(z)(1-n_z^2)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik_0R}}{R}\right)dS - ik_0\oiint\limits_S p_0(z)\,n_z(1-n_z^2)\frac{e^{-ik_0R}}{R}dS\right\},$$

где $h_n(k_0R)$ — сферические функции Ханкеля, $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра. При $\rho_0=\rho$, $\lambda+2\mu=\lambda_0$ выражение (9) дает рассеянную волну, возникающую вследствие наличия малого модуля сдвига

$$p_1(x_0y_0z_0) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda_0}\left\{\oiint\limits_S p_0(z)(1-n_z^2)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik_0R}}{R}\right)dS - \right.$$

$$\left. - ik_0\oiint\limits_S p_0(z)\cdot n_z(1-n_z^2)\frac{e^{-ik_0R}}{R}dS\right\}. \tag{10}$$

При равенстве плотностей и сжимаемостей $\left(\rho_0=\rho,\ \lambda+\frac{2}{3}\mu=\lambda_0\right)$ в выражении (9), кроме составляющей (10), остается еще и объемный интеграл, пропорциональный μ/λ_0, т. е. также обусловленный малым модулем сдвига.

В качестве примера приведем диаграммы направленности поля, рассчитанного по формуле (10), для случая, когда рассеивающее упругое включение имеет форму шара радиуса a (см. фигуру). Диаграммы направленности построены для случаев

$$k_0a \ll 1,\ p_1(x_0\,y_0\,z_0) = A\sin\theta\left(|A| = \frac{3\pi}{8}\frac{\mu}{\lambda_0}\frac{(k_0a)^2}{k_0R}p_0\right)\ (1)$$

и

$$k_0a \gg 1,\ p_1(x_0\,y_0\,z_0) = B\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^3\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}\left(|B| = \sqrt{\pi}\frac{2\mu}{\lambda_0}\frac{(k_0a)^{3/2}}{k_0R}p_0\right)\ (2).$$

Любопытно отметить, что рассеяние под углами 0° и 180° в обоих случаях отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Дифракция волн на неровной поверхности. I. Общая теория. Ж. эксп. и теор. физ., 1952 г. 23, 3, 275—288.
2. М. А. Исакович. Рассеяние волн от статистически-шероховатой поверхности. Ж. эксп. и теор. физ., 1952, 23, 3, 305—314.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М., ИЛ, 1960, гл. 13.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
22 января 1962 г.