

ОТРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ОТ СКОШЕННОГО КОНЦА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА

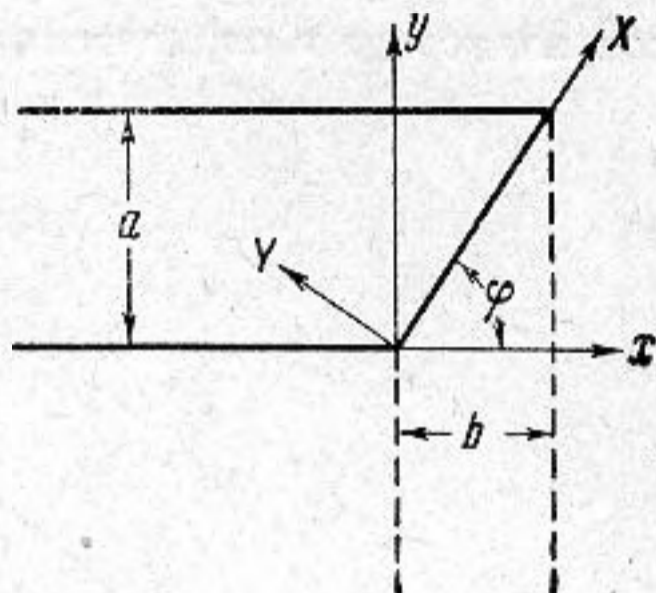
А. Д. Лапин

В работах [1, 2] было получено решение плоской задачи об отражении нормальных волн от конца прямоугольного волновода, закрытого жесткой или мягкой стенкой, расположенной под произвольным углом φ к его оси. В настоящей заметке дано обобщение этого решения на случай, когда стенка, закрывающая волновод, характеризуется реактивным импеданцем Z . Боковые стенки волновода ($y = 0$ и $y = a$ на фиг. 1) будем считать абсолютно жесткими. Выберем в качестве падающего поля нормальную волну номера r : $p_0(x, y) = \exp(i\kappa_r x) \cos(\xi_r y)$, где $\xi_r = r\pi/a$, $\kappa_r = \sqrt{k^2 - \xi_r^2}$, k — волновое число. Отраженное поле p будем искать при $x < 0$ в

виде суперпозиции нормальных волн $p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-i\kappa_n x) \cos(\xi_n y)$, где

A_n — неизвестные амплитуды.

Для нахождения поля p применим следующий прием. Рассмотрим сложный волновод, образованный сочленением под прямым углом исходного и вспомогательного волноводов (на фиг. 1 вспомогательный волновод обозначен пунктиром). Введем при $y < 0$ вспомогательное падающее \tilde{p}_0 такое, чтобы при $Y = 0$ полное поле P удовлетворяло соотношению



$$\{P\}_{Y=0} + \frac{i}{k} \frac{Z}{\rho c} \left\{ \frac{\partial P}{\partial Y} \right\}_{Y=0} = 0,$$

где ρ — плотность среды, заполняющей волновод, c — скорость звука в этой среде. Тогда задача о нахождении отраженного поля p сведется к задаче о дифракции поля

Фиг. 1

$$P_0 = \begin{cases} p_0 & \text{при } x < 0 \\ \tilde{p}_0 & \text{при } y < 0 \end{cases} \text{ в сложном волноводе.}$$

В рассмотренных в работе [1] частных случаях $\varphi = 45^\circ$, $Z = 0$ и $\varphi = 45^\circ$, $Z = \infty$, вспомогательное поле \tilde{p}_0 получается зеркальным отражением поля p_0 в плоскости $Y = 0$; теперь же это поле придется искать в виде суперпозиции нормальных волн $\tilde{p}_0(x, y) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} M_n \exp(i\xi_n y) \cos(v_n x)$, где $v_n = n\pi/b$, $\xi_n = \sqrt{k^2 - v_n^2}$, M_n — амплитуды нормальных волн, определяемые из граничного условия при $Y = 0$.

Для решения задачи был применен метод, аналогичный изложенному в работах [1, 2]. В результате соответственных вычислений было найдено, что амплитуды отраженных нормальных волн A_n являются решением бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_l &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,l} (M_n - N_n) + \delta_{l,r} \exp(i2\kappa_r b) \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(\delta_{n,r} - A_n) G_{n,l} - (M_n - N_n) H_{n,l}] &= 0 \end{aligned} \right\},$$

где

$$F_{n,l} = \frac{2\alpha_{n,l}}{\theta_l a} \frac{\sin(\kappa_l b)}{\sin(\xi_n a)} \exp(i\kappa_l b),$$

$$G_{n,l} = \left\{ \frac{Z}{\rho c} [\tilde{\mu}_{n,l} \kappa_n \sin \varphi + \tilde{\sigma}_{n,l} \xi_n \cos \varphi] + ik\tilde{\lambda}_{n,l} \right\},$$

$$H_{n,l} = \left\{ \frac{Z}{\rho c} [\mu_{n,l} \xi_n \cos \varphi + \sigma_{n,l} v_n \sin \varphi] - ik\lambda_{n,l} \right\},$$

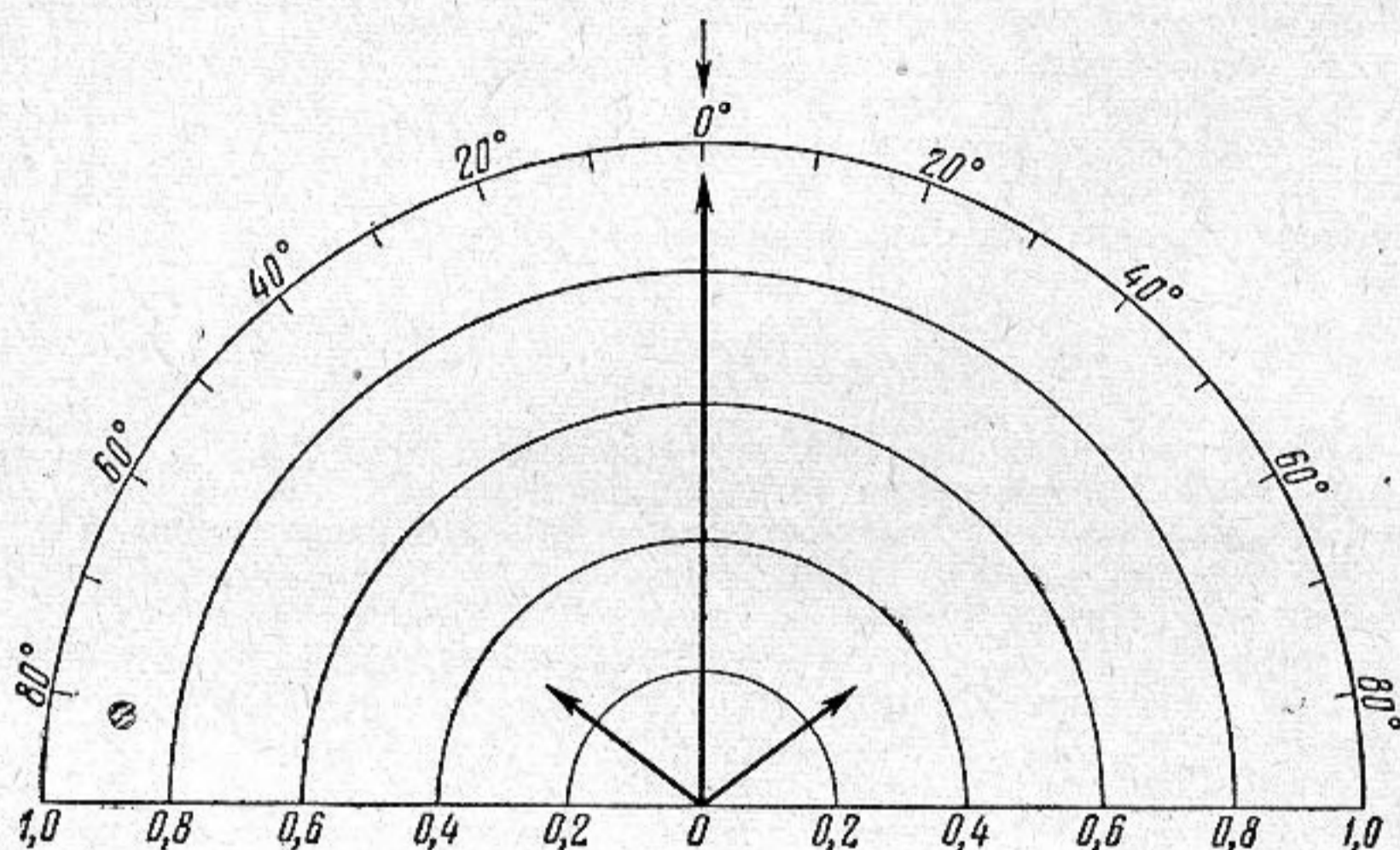
$$\lambda_{n,l} = \frac{(\alpha_{n,n-l} + \alpha_{n,n+l})}{\sin(\zeta_n a)}, \quad \mu_{n,l} = \frac{(\gamma_{n,n-l} + \gamma_{n,n+l})}{\sin(\zeta_n a)},$$

$$\sigma_{n,l} = \frac{(\beta_{n,n-l} + \beta_{n,n+l})}{\sin(\zeta_n a)}, \quad \beta_{n,l} = \frac{\xi}{\zeta_n} \gamma_{n,l}, \quad \alpha_{n,l} = \begin{cases} (-1)^l \theta_l a/2 & \text{при } \zeta_n = \xi_l \\ \frac{\zeta_n \sin(\zeta_n a)}{(\zeta_n^2 - \xi_l^2)} & \text{при } \zeta_n \neq \xi_l \end{cases},$$

$$\gamma_{n,l} = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta_n = \xi_l \\ \frac{\zeta_n}{(\zeta_n^2 - \xi_l^2)} [(-1)^l - \cos(\zeta_n a)] & \text{при } \zeta_n \neq \xi_l \end{cases},$$

$$\delta_{n,l} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = l \\ 0 & \text{при } n \neq l \end{cases}, \quad \theta_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0 \\ 1 & \text{при } n \neq 0 \end{cases}.$$

Здесь N_n — амплитуды нормальных волн, распространяющихся в вспомогательном волноводе в отрицательном направлении оси y . Величины $\tilde{\lambda}_{n,l}$, $\tilde{\mu}_{n,l}$, $\tilde{\sigma}_{nl}$ по-



Фиг. 2

лучаются соответственно из величин $\lambda_{n,l}$, $\mu_{n,l}$, $\sigma_{n,l}$ заменой в них ζ_n на $\kappa_n \operatorname{ctg} \varphi$. Заметим, что аналогичные вычисления можно выполнить и для волновода с мягкими боковыми стенками. Тогда получим бесконечную систему алгебраических уравнений для амплитуд отраженных нормальных волн B_n . Бесконечные системы уравнений для A_n и B_n удобно решать численно редуцированным методом.

Полученные решения A_n и B_n можно использовать для решения задачи о рассеянии плоской волны $p_0(x,y) = \exp[i(\kappa_r x + \xi_r y)]$ на симметричной пилообразной поверхности с периодом $2a$, имеющей углы 2φ при вершинах и характеризующейся реактивным импедансом Z . Методом, аналогичным изложенному в работе [1], можно показать, что амплитуды рассеянных спектров R_n этой плоской волны связаны с

амплитудами нормальных волн A_n и B_n соотношениями: $R_n = \frac{1}{2}(A_n + B_n)$,

$R_{-n} = \frac{1}{2}(A_n - B_n)$. Величины $|R_n|$, рассчитанные указанным способом для случая $r = 0$, $\varphi = 45^\circ$, $ka = 4$ и $Z/\rho c = i9$, представлены на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Л а п и н. Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 2, 189—193.
2. А. Д. Л а п и н. К вопросу об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода. Акуст. ж., 1962, 8, 4, 476—477.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
10 октября 1962 г.