АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX 1963 Вып. 3

УДК 534.2

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

И. Н. Каневский

В квадратичном приближении получено выражение для распределения потенциала в фокальной области сходящихся цилиндрических и сферических волновых фронтов в поглощающих средах. Показано, что при диссипации энергии волны фокусные расстояния изменяются на величины, пропорциональные коэффициенту поглощения среды. Предложен метод определения больших коэффициентов поглощения на основании измерения фокусного расстояния сходящегося волнового фронта.

В работах [1—7] рассмотрены сходящиеся волновые фронты, создаваемые сферическими и цилиндрическими фокусирующими системами в средах без поглощения. Наличие диссипации энергии в среде, кроме более медленного нарастания амплитуды в сходящейся волне, может вызвать такие особенности в фокусировании ультразвуковых волн, как смещение фокусов. Для рассмотрения этого явления как в сферических, так и в цилиндрических сходящихся фронтах достаточно воспользоваться методом Дебая [5]. Однако решение задачи этим методом с помощью приемов, применяемых в работах [2—5], привело бы к слишком громоздким и малонаглядным выражениям. Более удобно использовать вычислительную методику Зоммерфельда [6], рассмотревшего распределение потенциала в фокальной области в квадратичном приближении.

Будем считать коэффициент поглощения γ входящим в комплексное волновое число $\varkappa = k(1 - i\delta)$, где $\delta = \gamma/k$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в среде, и рассмотрим распределение потенциала в фокальной области цилиндрического сходящегося волнового фронта. Для этого воспользуемся соответствующим выражением для потенциала колебательной скорости в виде, приведенном в работе [7]:

$$\Phi = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{\sin n\alpha_m}{n\alpha_m} J_n(\varkappa r_0) \cos n\alpha_0 , \qquad (1)$$

где $A = v_0 \sqrt{2f/\pi k} \exp(i\pi/4 - ikf)$, $\varepsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 2$ при $n \neq 0$; $J_n(\varkappa r_0)$ — функция Бесселя n-го порядка; α_m — угол раскрытия цилиндрического фронта (см. фиг. 1, где показана проекция цилиндрического фронта Σ на плоскость чертежа), v_0 — амплитуда колебательной скорости на поверхности Σ, расположенной на расстоянии f от геометрического фокуса *, r_0 и α_0 — полярные координаты точки наблюдения с полюсом в геометрическом фокусе. Ограничиваясь в формуле (1) квадратичным приближением по $\rho = kr_0$ и линейным по δ,

* Под геометрическим фокусом подразумевается фокус, вычисленный в лучевом приближении; при нашем рассмотрении он совпадает с центром кривизны поверхности Σ.

получим

$$J_0(\varkappa r_0) = 1 - \frac{1}{4}\rho^2(1 - i\,2\delta),\ \ J_1(\varkappa r_0) = \frac{1}{2}\rho(1 - i\delta),\ \ J_2(\varkappa r_0) =$$

$$= \frac{1}{8}\rho^2(1 - i\,2\delta).$$

Подставим эти выражения в формулу (1) и вычислим квадрат модуля потенциала:

$$\Phi^2 = 1 - a_1 z^2 - a_2 y^2 + 2\,a_3 z - 1 = 0\,,$$

$$\text{где}\ \ a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha_m}{2\alpha_m} - 2\,\frac{\sin^2\alpha_m}{\alpha_m^2}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha_m}{2\alpha_m}\right), \qquad a_3 = \delta\,\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}\,.$$

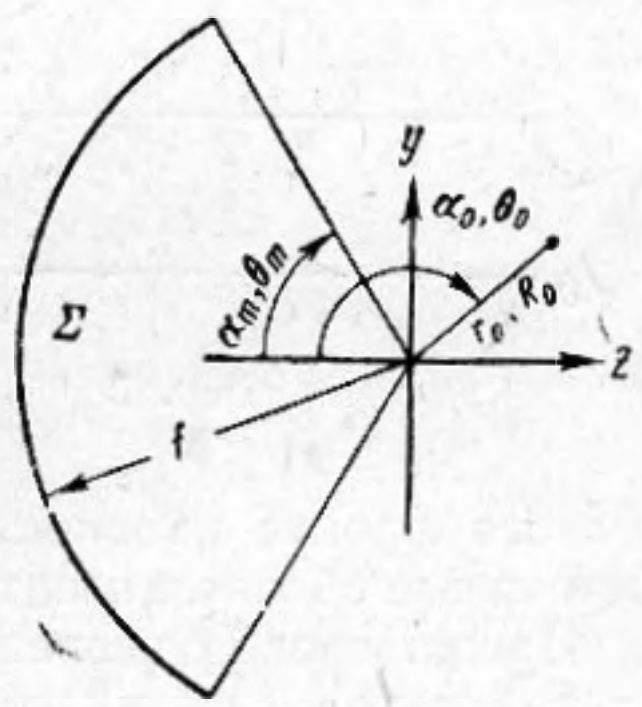
Полагая $\Phi^2 = 0$, получим линию, на которой интенсивность поля обращается в нуль:

$$a_1 z^2 + a_2 y^2 - 2\,a_3 z - 1 = 0. \tag{2}$$

Легко показать, что это эллипс, смещенный относительно геометрического фокуса на величину

$$z_1 = \frac{\delta}{a_1}\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}. \tag{3}$$

Как уже указывалось в работе [1], в фокальной области цилиндрического сходящегося фронта потенциал может обратиться в нуль только в отдельных точках фокальной плоскости и совсем не обращается в нуль в осевой плоскости (в направлении распространения волны). С другой стороны, из выражения (2) следует, что потенциал может обратиться в нуль на замкнутой линии. Этот противоречивый результат получился вследствие приближенности выражения (2). Тем не менее, последнее выражение удобно для определения формы, размеров и положения фокальной области в случае квадратичного приближения по ρ. Из формул (2) и (3) следует, что в диссипативных средах фокусное расстояние у цилиндрических фокусирующих систем изменяется на величину z_1, пропорциональную коэффициенту поглощения среды. Формулу (3) можно переписать в виде



Фиг. 1

$$z_1 = \beta\psi_1(\alpha_m)\,, \tag{4}$$

где

$$\psi_1(\alpha_m) = \frac{\dfrac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}}{\pi\left[1 + \dfrac{\sin 2\alpha_m}{2\alpha_m} - 2\left(\dfrac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}\right)^2\right]}\,. \tag{5}$$

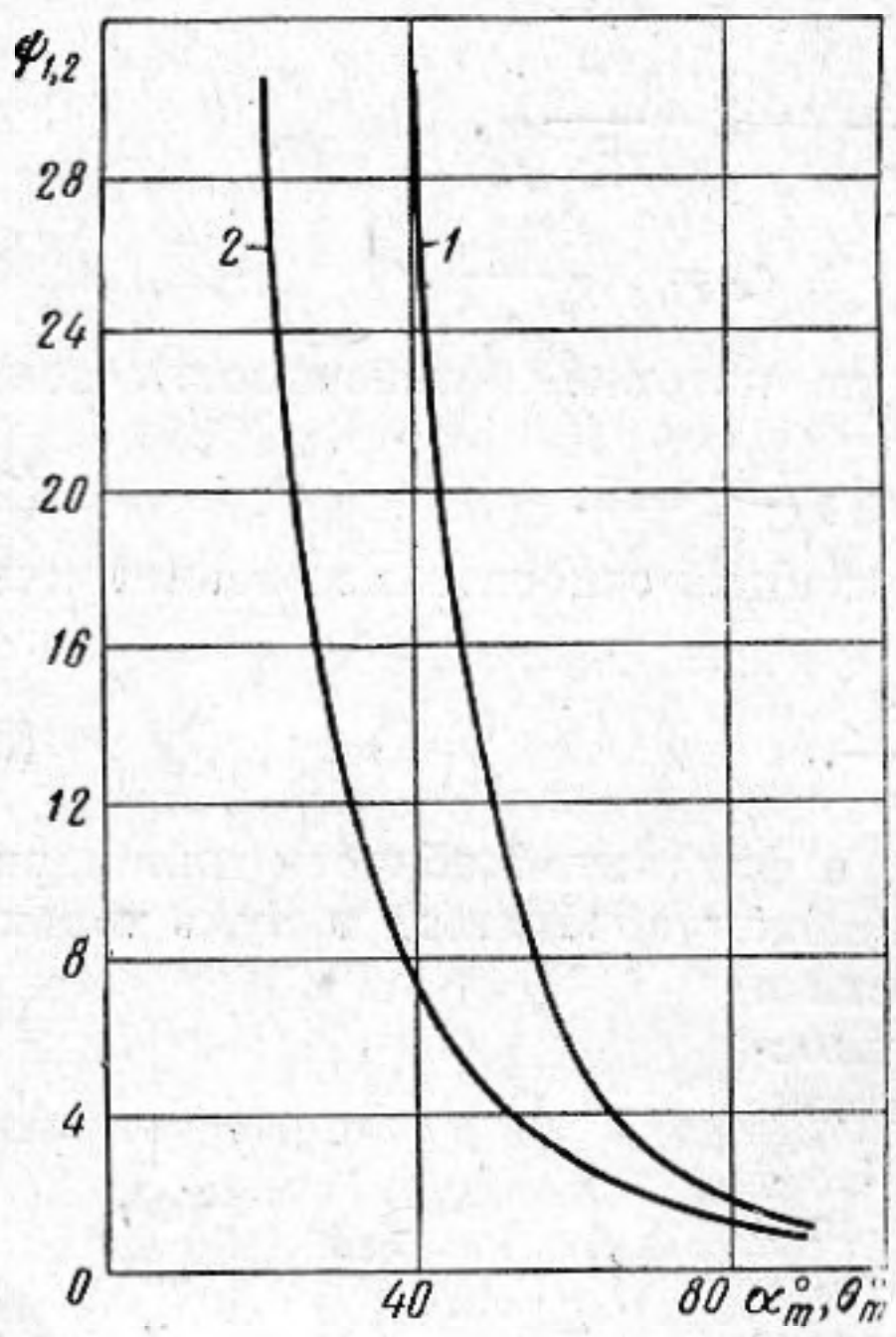
Здесь $\beta = \gamma\lambda$ — коэффициент поглощения на длину волны, $1/\beta$ — расстояние, выраженное в длинах волн, на котором амплитуда волны убывает в e раз.

На фиг. 2 (кривая *1*) показан график функции $\psi_1(\alpha_m)$, из которого видно, что смещение фокусного расстояния увеличивается при уменьшении угла раскрытия волнового фронта. При малых α_m, заменив в формуле (5) синусы их разложениями в ряды с точностью до α_m^4, получим

$$\psi_1(\alpha_m) = \frac{22{,}5}{\pi\alpha_m^4}\,,$$

т. е. в слабо сходящихся цилиндрических волновых фронтах смещение фокуса обратно пропорционально четвертой степени угла раскрытия.

Следует подчеркнуть, что зависимость изменения фокусного расстояния от угла раскрытия α_m совершенно отлична от зависимости размеров фокальной области от α_m, рассмотренной в работе [2]. Действительно, первый эффект — смещение фокуса — наблюдается только в диссипативных средах и обращается в нуль при любых углах раскрытия, если $\delta = 0$. Второе явление — изменение размеров фокальной области с изменением α_m — проявляется как в диссипативных, так и в недиссипативных средах, причем в последнем случае центр фокального пятна совпадает с геометрическим фокусом при любых значениях α_m.



Фиг. 2

Рассмотрим теперь влияние поглощения в среде на волновой фронт сферической формы. Потенциал скорости такой волны можно представить в виде [1]

$$\Phi = 2\pi B \int_0^{\theta_m} \exp(i\varkappa R_0 \cos\theta_0 \cos\theta) \times$$

$$\times J_0(\varkappa R_0 \sin\theta_0 \sin\theta) \sin\theta \, d\theta, \qquad (6)$$

где $B = (v_0 f/2\pi) \exp(-ikf)$, R_0 и θ_0 — сферические координаты точки наблюдения с полюсом в геометрическом фокусе, θ_m — угол раскрытия волнового фронта (см. фиг. 1, где в этом случае Σ — сечение сферического фронта плоскостью чертежа, проходящей через оптическую ось). Остальные обозначения такие же, как и в формуле (1).

Представим подынтегральные выражения в виде рядов и ограничимся квадратичными членами по ρ и линейными по δ:

$$\exp(i\varkappa R_0 \cos\theta_0 \cos\theta) \approx 1 + \rho \cos\theta_0 (i + \delta) \cos\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho^2 \cos^2\theta_0 (i2\delta - 1) \cos^2\theta,$$

$$J_0(\varkappa R_0 \sin\theta_0 \sin\theta) \approx 1 + \frac{1}{4} \rho^2 \sin^2\theta_0 (i2\delta - 1) \sin^2\theta.$$

После подстановки рядов в формулу (6), интегрирования и возведения в квадрат, получим

$$\Phi^2 = B^2 \Omega^2 [1 - a_1 (x^2 + y^2) + a_2 z^2 + 2a_3 z],$$

где $\Omega = 2\pi (1 - \cos\theta_m)$ — телесный угол раскрытия сферического фронта, $a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cos\theta_m (1 + \cos\theta_m)$, $a_2 = \frac{1}{12} (1 - \cos\theta_m)^2$, $a_3 = \delta (1 + \cos\theta_m)$, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $z = \rho \cos\theta_0$. Оси x, y лежат в фокальной плоскости, ось z совпадает с оптической осью.

Форму и размер фокального пятна сферического волнового фронта определим из уравнения $\Phi^2 = 0$ или

$$a_1 (x^2 + y^2) + a_2 z^2 - 2a_3 z - 1 = 0.$$

Это — уравнение эллипсоида, смещенного относительно геометрического фокуса на величину

$$z_2 = \beta\psi_2(\theta_m), \tag{7}$$

здесь

$$\psi_2(\theta_m) = \frac{\sigma}{2\pi}\frac{1+\cos\theta_m}{(1-\cos\theta_m)^2}. \tag{8}$$

В данном приближении смещение z_2 прямо пропорционально поглощению на длину волны β. На фиг. 2 (кривая *2*) приведен график функции $\psi_2(\theta_m)$, из которого следует, что величина смещения фокального пятна z_2 увеличивается при уменьшении угла раскрытия θ_m. Как и в случае цилиндрического фронта, это смещение обусловлено диссипацией энергии в среде и отсутствует при $\beta = 0$. При малых углах раскрытия $\psi_2(\theta_m) = \frac{12}{\pi}\frac{1}{\theta_m^2}$, т. е. смещение фокального пятна обратно пропорционально квадрату угла раскрытия фронта.

Интересно отметить, что, как показано в работе [3], в сферических фокусирующих системах с малым коэффициентом усиления, работающими даже в непоглощающей среде, потенциал вдоль оптической оси распределен не симметрично.

Произведем количественную оценку эффекта изменения фокусного расстояния. Для такой, сравнительно сильно поглощающей жидкости, как уксусная кислота, при температуре 18° на частоте 500 *кгц* коэффициент поглощения $\gamma = 0{,}225$ *см*$^{-1}$. Для излучателей с углом раскрытия $\alpha_m = 50°$ из графиков на фиг. 2 находим $\psi_1 = 12$, $\psi_2 = 5$. Подставляя эти величины в формулы (4) и (7), получим

$$z_1 = 2{,}72\lambda\,,\; z_2 = 1{,}125\lambda. \tag{9}$$

Так как скорость звука в уксусной кислоте равна $1{,}15\cdot10^5$ *см/сек*, то в нашем случае $\lambda = 0{,}23$ *см*, $z_1 = 0{,}63$ *см*, $z_2 = 0{,}26$ *см*. Это означает, что в цилиндрическом концентраторе фокус сместится более чем на 6 *мм*, а в сферическом — почти на 3 *мм*. Такие изменения фокусного расстояния следует учитывать.

Для воды при температуре 20—25° на частоте 7 *мгц* $\gamma = 12{,}5\cdot10^{-3}$*см*$^{-1}$, при $\alpha_m = 40°$ величина $\psi_1 = 30$, $z_1 = 0{,}4\lambda$. Так как $\lambda = 0{,}012$ *см*, то $z_1 = 0{,}0084$ *см* $\sim 0{,}1$ *мм*. Приблизительно на такую же величину сместится фокус у сферического волнового фронта с углом раскрытия $\theta_m = 20°$. На практике таким смещением фокусного расстояния можно пренебречь.

Приведенные выше расчеты применимы и к оптическим фокусирующим системам. Если поглощение световых волн такое же, как ультразвуковых в уксусной кислоте, то согласно (7), фокусное расстояние цилиндрического сходящегося волнового фронта может измениться не более чем на три длины волны, что составит для длины волны 5000 Å только 1,5 *мк*. Для сферического фронта эта величина еще меньше. Таким образом, для оптических систем, работающих даже в сильно поглощающих средах, смещение фокусного расстояния столь мало, что его можно не учитывать. Обычно же оптические фокусирующие системы работают в средах без поглощения, для которых $z_{1,2} = 0$.

Если имеется аппаратура для измерения фокусного расстояния ультразвуковых фокусирующих систем, то явление смещения фокусов можно использовать для измерения больших коэффициентов поглощения. Для этого достаточно измерить фокусное расстояние f_1 в среде с известным коэффициентом поглощения β_1 и фокусное расстояние f_2 в исследуемой среде с искомым коэффициентом поглощения β_2; при этом $f_1 = f_0 + \psi_i\beta_1$, $f^2 = f_0 + \psi_i\beta$, где f_0 — фокусное расстояние в среде без поглощения. При $i = 1$ формулы относятся к цилиндрической сходящейся волне, а при $i = 2$ — к сферической. Из выражения $f_1 - f_2 = \psi_i(\beta_1 - \beta_2)$ получим

искомый коэффициент поглощения

$$\beta_2 = \frac{f_2 - f_1 + \psi_i \beta_1}{\beta_1}.$$

Автор выражает благодарность Л. Д. Розенбергу, предложившему исследовать некоторые вопросы фокусирования ультразвуковых волн в диссипативных средах и высказавшему ряд полезных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949.
2. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 46—61.
3. Б. Д. Тартаковский. О дифракции звуковых волн в сходящихся пучках. Акуст. ж., 1958, 4, 4, 355—360.
4. И. Н. Каневский. Исследование структуры поля цилиндрического концентрата ультразвука. Акуст. ж., 1961, 7, 1, 40—46.
5. P. Debye. Das Verhalten von Lichtwellen in der Neehe eines Brennpunktes oder einer Brennlinie. Ann. Phys., 1909, 30, 755—776.
6. А. Зоммерфельд. Оптика. М., ИЛ, 1953.
7. И. Н. Каневский. Исследование цилиндрических фокусирующих систем (канд. диссертация). Акустический институт АН СССР, 1960.

Государственный н.-и. и проектный
институт редкометаллической
промышленности
Москва

Поступила в редакцию
31 января 1963 г.