АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 2

УДК 534,26

О КРАЕВОМ ЭФФЕКТЕ БОЛЬШОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Ю. П. Лысанов

Рассчитан «краевой эффект» большего излучателя (в виде бесконечной полосы) с распределением нормальной составляющей колебательной скорости по поверхности в виде функции, постоянной почти всюду и плавно убывающей к нулю при приближении к краю излучателя. Показано, что звуковое поле на больших расстояниях от излучателя всегда содержит цилиндрическую волну, исходящую как бы из линии, где производная от функции распределения колебательной скорости имеет максимальное значение. Чем плавнее убывает колебательная скорость при приближении к краю излучения, тем уже становится характеристика направленности цилиндрической волны.

Звуковое поле, создаваемое излучателем конечных размеров, содержит на большом расстоянии волны, исходящие как бы от его краев. Эти волны, представляющие собой так называемый «краевой эффект» излучателя, обусловлены скачком нормальной составляющей колебательной скорости на краю излучателя. Интерференция краевых волн с основным пучком в ряде случаев может существенно ухудшить характеристику направленности излучателя; поэтому краевые волны желательно устранить. Часто этого пытаются достигнуть, делая распределение колебательной скорости по поверхности излучателя плавно убывающим к нулю при приближении к краям. Однако этот путь дает лишь частичное улучшение, поскольку полностью устранить краевые волны оказывается невозможным. В связи с этим представляет интерес исследовать, как изменяются краевые волны по мере того, как распределение колебательной скорости становится все более плавным.

Пусть излучающая поверхность плоского излучателя совпадает с плоскостью $z = 0$ прямоугольной системы координат. Размер излучателя по оси x будем считать большим по сравнению с длиной волны звука; в направлении оси y излучатель будем считать бесконечно протяженным, что не существенно для дальнейшего рассмотрения. Очевидно, что для большого излучателя расчет достаточно провести лишь для одного из краев, так как взаимодействием волн, излучаемых краями, можно пренебречь. На основе сделанных предположений можно схематически представить излучатель в виде бесконечной плоскости $z = 0$, на которой задано следующее распределение z-составляющей колебательной скорости:

$$v_z(x) = \left(\frac{v_0}{1 + e^{\gamma x}} \right)^*, \tag{1}$$

где γ — постоянная величина, характеризующая быстроту изменения функции $v_z(x)$.

Графики функций $v_z(x)$ и ее производной по x показаны на фиг. 1. Следует отметить, что функция $v_z(x)$ и все ее производные непрерывны и конечны. Первая производная функция $v_z(x)$ достигает максимального значения (по абсолютной величине) в точке $x = 0$.

* Множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и в дальнейшем опускаем.

Сформулируем теперь рассматриваемую задачу. Требуется найти функцию $p(x, z)$, которая должна в области $z > 0$, $-\infty < x < \infty$ представлять решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \tag{2}$$

при $z = 0$ удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{ik\rho c v_0}{1 + e^{\gamma x}} \tag{3}$$

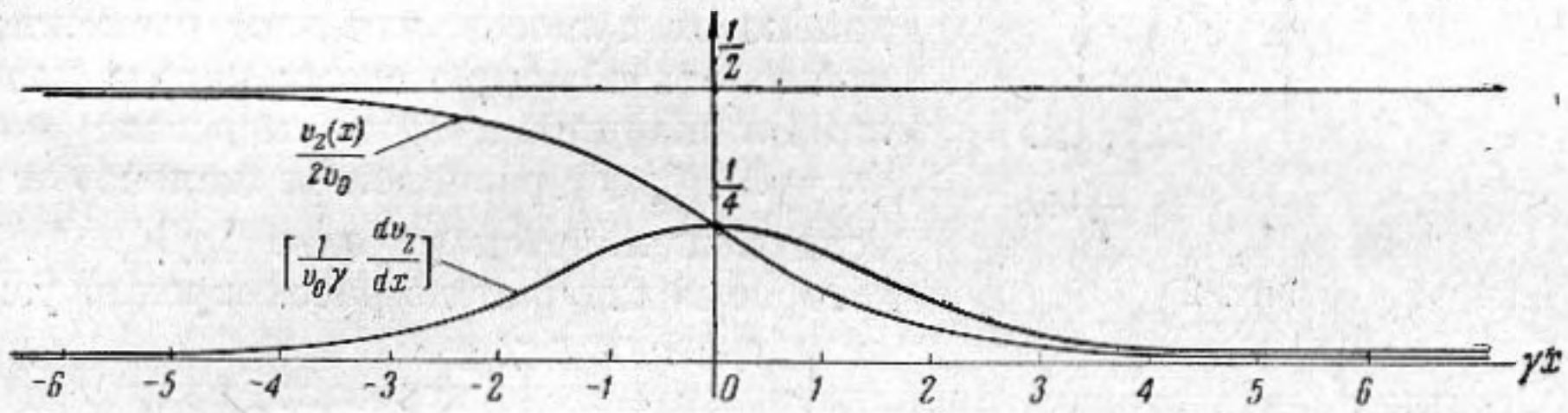
где ρc — волновое сопротивление среды, и при $z > 0$ удовлетворять условию погашаемости [1]:

$$|p(x, z)| < \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > 0. \tag{4}$$

Покажем, что этим условиям удовлетворяет функция

$$p(x, z) = -\frac{ik\rho c v_0}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma x w + i\sqrt{k^2 - (\gamma w)^2} z}}{\sqrt{k^2 - (\gamma w)^2}\, \operatorname{sh}(\pi w)} dw. \tag{5}$$

Путь интегрирования Г проходит по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом точек $w = 0$, $w = k/\gamma$ снизу, точки $w = -k/\gamma$ — сверху.



Фиг. 1

Решение (5) удовлетворяет волновому уравнению (2), так как ему удовлетворяет подынтегральное выражение, имеющее вид плоской волны. Покажем, что это решение удовлетворяет граничному условию. Дифференцируя выражение (5) по z, получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{k\rho c v_0}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma x w}}{\operatorname{sh}(\pi w)} dw. \tag{6}$$

Интеграл легко вычисляется

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma x w}}{\operatorname{sh}(\pi w)} dw = \frac{2i}{1 + e^{\gamma x}}. \tag{7}$$

Подстановка выражения (7) в формулу (6) сразу приводит к формуле (3).

Выбирая знак квадратного корня в выражении (5) так, чтобы на контуре интегрирования при $\operatorname{Im} k > 0$ выполнялось неравенство $\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - (\gamma w)^2} > 0$, мы удовлетворим условию (4).

Таким образом, функция $p(x, z)$, определенная выражением (5), удовлетворяет всем условиям задачи и представляет собой строгое решение.

Для исследования асимптотического поведения полученного решения удобно сделать замену переменной $\gamma w = k \sin \vartheta$ и ввести обозначения $-x = r \sin \chi$ и $z = r \cos \chi$, где r — расстояние между точкой наблюдения и точкой $x = 0$ на плоскости $z = 0$, которая характерна тем, что в ней $|dv_z / dx|$ имеет максимальное значение.

В новых обозначениях выражение для $p(r, \chi)$ можно написать в виде

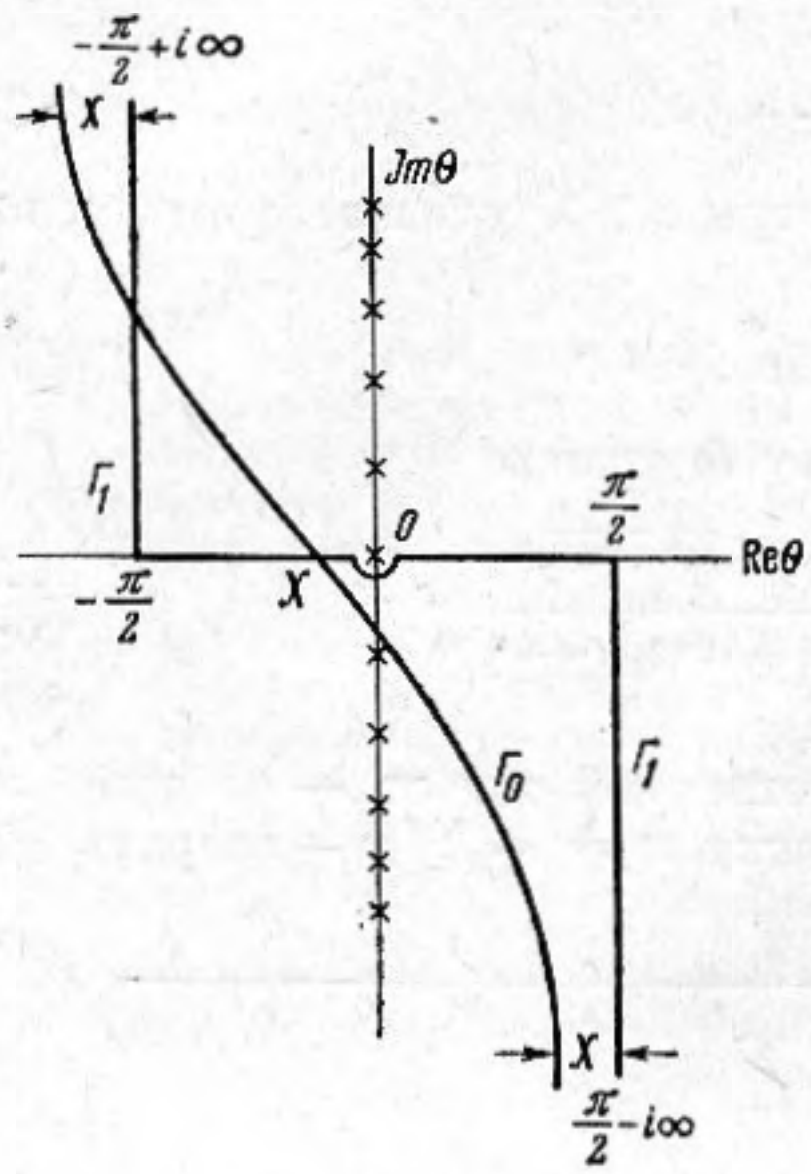
$$p(r, \chi) = -\frac{ik\rho c v_0}{2\gamma} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{e^{ikr\cos(\theta-\chi)}}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k}{\gamma}\sin\vartheta\right)} d\vartheta; \tag{8}$$

контур интегрирования Γ_1 показан на фиг. 2.

Для значений $kr \gg 1$ интеграл в формуле (8) может быть вычислен методом перевала. Функцию $\operatorname{sh}(\pi k \sin\theta / \gamma)$ можно считать медленно изменяющейся по сравнению с экспонентой, если $\gamma r \gg \pi$. В этом случае координата точки перевала будет $\vartheta = \chi$. Медленно изменяющаяся часть подынтегрального выражения имеет в плоскости комплексного ϑ полюса, определяемые уравнением

$$\sin\vartheta_n = \frac{i\gamma}{k} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Схема расположения полюсов и перевальный путь Γ_0 (при $\chi < 0$) показаны на фиг 2. Полюса отмечены крестиками.



Фиг. 2

Мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда точка перевала расположена далеко от полюсов, что дает возможность применить обычную схему метода перевала. Ближайший к точке перевала полюс ($n = 0$), будет расположен «далеко» от нее, если выполняется условие $|\chi| \gg 1/\sqrt{kr}$, которое исключает из рассмотрения узкую область вблизи $\chi = 0$.

Ограничиваясь вторым приближением метода перевала, получаем при $\chi < 0$ (точка наблюдения расположена правее точки $x = 0$)

$$p(r, \chi) = \rho c v_0 \left\{ F(\chi) \frac{e^{ikr - 3\pi i/4}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{e^{-n\gamma x + ikz\sqrt{1+(\gamma n/k)^2}}}{\sqrt{1+(\gamma n/k)^2}} \right\} \tag{10}$$

и при $\chi > 0$ (точка наблюдения расположена левее точки $x = 0$)

$$p(r, \chi) = \rho c v_0 \left\{ e^{ikz} + F(\chi) \frac{e^{ikr - 3\pi i/4}}{\sqrt{kr}} + \sum_{n=1} (-1)^n \frac{e^{n\gamma x + ikz\sqrt{1+(\gamma n/k)^2}}}{\sqrt{1+(\gamma n/k)^2}} \right\}, \tag{11}$$

где

$$F(\chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k/\gamma}{\operatorname{sh} D} \left\{ 1 + \frac{1}{8ikr} \left[\frac{4\operatorname{ctg}^2\chi(1+\operatorname{ch}^2 D) + \left(\frac{\operatorname{sh} 2D}{2D}\right)}{\left(\frac{\operatorname{sh} D}{D}\right)^2} \right] \right\} \tag{12}$$

$$D = \frac{\pi k \sin\chi}{\gamma}. \tag{13}$$

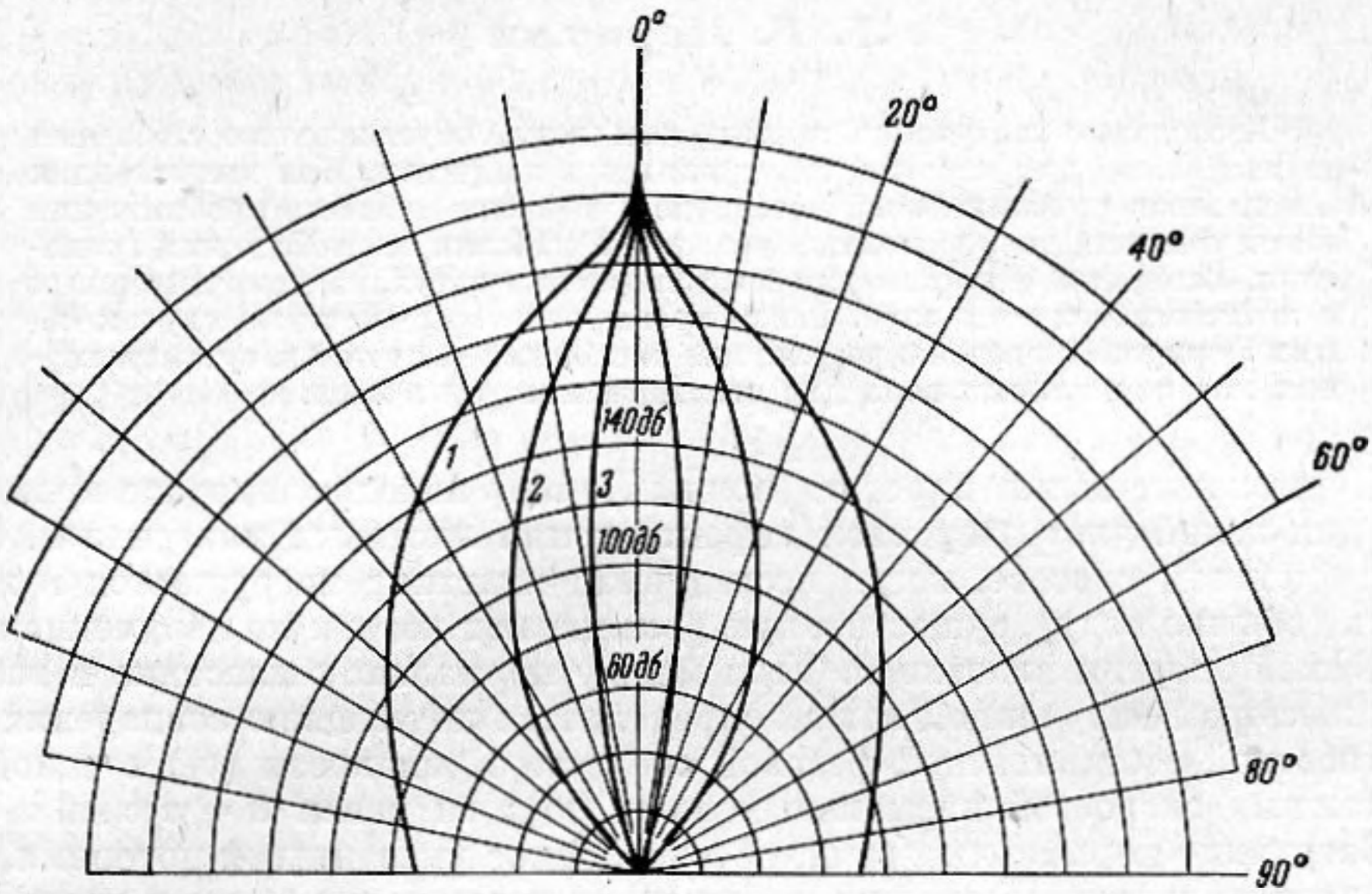
Второй член в фигурных скобках в выражении (12) является малой величиной по сравнению с единицей, что можно легко показать, если воспользоваться неравенством $|\chi| \gg 1/\sqrt{kr}$ и предположить, что $r \gg L/\lambda$, $\lambda = 2\pi/k$ и $L \equiv \pi^{3/2}/\gamma$ — эффективная ширина переходного участка функции $v_z(x)$. Последнее неравенство означает, что точка наблюдения должна лежать в зоне Фраунгофера относительно участка размером L, расположенного около точки $x = 0$.

Последние члены в формулах (10) и (11) представляют собой сумму неоднородных волн, распространяющихся вдоль оси z и экспоненциально затухающих при удалении от точки $x = 0$ соответственно вправо и влево по оси x.

Число неоднородных волн равно числу полюсов, пересекаемых при превращении первоначального контура Γ_1 в перевальный контур Γ_0. Оно определяется из условия

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma n}{k}\right)^2} \leqslant \frac{1}{\cos \chi}. \tag{14}$$

На фиг. 3 показаны графики функции $k / \gamma / \operatorname{sh} D$, представляющей собой характеристику направленности источника цилиндрической волны для



Фиг. 3

различных значений k / γ (кривые *1* — 5; *2* — 10; *3* — 25). С увеличением отношения k / γ (это соответствует тому, что нормальная составляющая колебательной скорости при приближении к краю излучателя все более плавно стремится к нулю) характеристика направленности все более сужается. Узкая угловая область вблизи $\chi = 0$, где формулы (10)—(11) неприменимы и $|F(\chi)| \to \infty$, показана на графике условно пунктиром.

Таким образом, звуковое поле излучателя всегда содержит цилиндрическую волну, исходящую как бы из линии, на которой производная нормальной составляющей колебательной скорости имеет максимальное значение. Это означает, что каким бы плавным мы не делали распределение колебательной скорости вблизи края излучателя, избавиться от краевых волн невозможно. Однако можно сделать характеристику направленности их сколь угодно узкой, что может оказаться существенным при расчетах характеристик направленности реальных излучателей.

В заключение выражаю глубокую благодарность Г. Д. Малюжинцу за ряд ценных советов и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец. Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области. Докл. АН СССР, 1951, 78, 3, 439—442.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
30 августа 1963 г.