АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X 1964 Вып. 4

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.21

ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. Ю. Завадский

В динамической теории упругих сред большое значение имеет метод представления поля смещения в среде в виде суммы двух независимых полей, относящихся к различным типам деформации среды. Использование независимых величин оказывается удобным по многим причинам; одной из них является относительная простота закономерностей для каждой величины. Такими независимыми величинами в однородной упругой среде являются поля продольных и поперечных волн, связанных соответственно только с изменением объема элемента среды или только с изменением его формы. Их независимость проявляется в том, что в однородной среде деформации, связанные с изменением формы элемента среды, могут вызвать в соседних элементах только деформации подобного характера. В таком случае говорят, что распространяется поперечная волна. То же самое (если изменяется объем) относится к продольным волнам. Поле каждого типа волн удовлетворяет волновому уравнению с соответственной постоянной, определяющей скорость распространения волн [1].

Трудности возникают тогда, когда среда имеет границы, свободные (жестко закрепленные) или отделяющие две однородные среды с различными свойствами. На границах продольные и поперечные волны оказывают влияние друг на друга и каждая из них порождает волны обоих типов. Если границ много, то упрощения, возникающие из-за независимого распространения волн в областях между границами не могут компенсировать трудностей, связанных с учетом границ, и задача значительно усложняется. Предельным случаем является неоднородная упругая среда, свойства которой изменяются непрерывно от точки к точке. Однако, как это часто бывает, непрерывные зависимости, опирающиеся на теорию дифференциальных соотношений, оказываются более доступными анализу, чем дискертные. Поэтому интересно выяснить, всегда ли колебания обоих типов в среде с непрерывным изменением свойств взаимнозависимы или существуют случаи, когда это не так.

Рассмотрим в декартовой системе координат x, y, z упругую изотропную слоисто-неоднородную среду, в которой плотность ρ и параметры Ламе λ, μ изменяются в зависимости от координаты z как непрерывные, дифференцируемые по меньшей мере дважды функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$. Вектор смещения $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ удовлетворяющий уравнению [2, 3]

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\mathbf{U}) + \mu\nabla^2\mathbf{U} + \nabla\lambda(\nabla\mathbf{U}) + \nabla\mu\times(\nabla\times\mathbf{U}) + 2(\nabla\mu\nabla)\mathbf{U}, \qquad (1)$$

будем считать расположенным в плоскости xz, не зависящим от y и зависящим от x, t согласно множителю $\exp(-i\omega t + i\xi x)$. Введем согласно формуле $\mathbf{U} = \nabla\varphi + \nabla\times(\psi\mathbf{e}_y)$ скалярный φ и векторный ψ потенциалы, а также величины S, T, связанные с φ, ψ выражениями

$$(\lambda+2\mu)(\varphi'' - \xi^2\varphi) = S, \qquad -\mu(\psi'' - \xi^2\psi) = T, \qquad (2)$$

где, как и всюду в дальнейшем, штрих обозначает производную по z. В работе [4] показано, что для рассматриваемого движения уравнение (1) будет удовлетворяться, если S, T удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$S'' + \left(\frac{\omega^2\rho}{\lambda+2\mu} - \xi^2\right)S - 2i\xi\frac{\mu'}{\mu}T - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}(S' - i\xi T) - \frac{r}{h}(T' + i\xi S) = 0,$$

$$T'' + \left(\frac{\omega^2\rho}{\mu} - \xi^2\right)T + 2i\xi\frac{\mu'}{\mu}S - \frac{1}{2}\frac{h'}{h}(T' + i\xi S) + \frac{r}{h}(S' - i\xi T) = 0, \qquad (3)$$

где $h = \omega^4\rho^2 - 4\xi^2\mu'^2$, $r = 2i\xi\omega^2(\mu'\rho' - \mu''\rho)$.

Величина S обращается тождественно в нуль, когда движение в среде происходит без изменения объема ($\nabla \mathbf{U}_t = 0$, $\mathbf{U}_t = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_y)$ — смещение в поперечных волнах), а величина T тождественно равна нулю для чисто продольных волн, связанных только с изменением объема элемента среды ($\nabla \times \mathbf{U}_l = 0$, $\mathbf{U}_l = \nabla \varphi$ — смещение в продольных волнах).

Рассмотрим случай $S \equiv 0$, $T \not\equiv 0$. Достаточным условием того, чтобы это требование удовлетворялось одновременно с удовлетворением системе уравнений (3), является обращение первого уравнения из системы (3) в тождество, в то время как второе уравнение должно определить величину T. Это может быть достигнуто для ρ, λ, μ, связанных уравнениями

$$r = 2i\xi\omega^2(\mu'\rho' - \mu''\rho) = 0, \quad -2i\xi\frac{\mu'}{\mu} + i\xi\frac{h'}{2h} = 0. \tag{4}$$

Из первого уравнения (4) получим $\mu'\rho^{-1} = \alpha = \text{const}$. Определяя отсюда ρ и подставляя его в выражение для h, приведем второе уравнение системы (4) к виду:

$$2\mu'^2 - \mu\mu'' = 0. \tag{5}$$

Интегрирование уравнения (5) дает $\mu(z) = (az + b)^{-1}$, где a, b — произвольные постоянные. Полученный результат означает, что в упругой среде с изменением плотности ρ и параметра μ по закону: $\rho(z) = \rho(z_0)(z/z_0)^{-2}$, $\mu(z) = \mu(z_0)(z/z_0)^{-1}$ могут существовать такие поперечные волны, которые не возбуждают продольных волн.

Выражение для потенциала таких поперечных волн приведено в работе [5], где исследована упругая слоисто-неоднородная среда со степенным законом изменения ρ, λ, μ. В настоящей работе никаких ограничений (кроме непрерывности и дифференцируемости) на класс функций $\lambda(z)$ не накладывается. Поэтому, воспользовавшись результатами работы [5], но теперь уже для любых $\lambda(z)$, имеем

$$\varphi \equiv 0; \qquad \psi = z[C_1 W_{\nu/2,\,-3/2}(2\xi z) + C_2 W_{-\nu/2,\,3/2}(-2\xi z)], \tag{6}$$

где введены обозначения $\nu = \omega^2\rho(z_0)z_0\xi^{-1}[\mu(z_0)]^{-1}$, $W_{k,\,s}(\tau)$ — функция Уиттеккера [6], C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим противоположный случай: $T \equiv 0$, $S \not\equiv 0$. Потребовав, чтобы второе уравнение в системе (3) тождественно удовлетворялось, получим

$$r = 2i\xi\omega^2(\mu'\rho' - \mu''\rho) = 0, \quad 2i\xi\frac{\mu'}{\lambda + 2\mu} - \frac{i\xi h'}{2h} = 0. \tag{7}$$

Из первого уравнения (7) имеем

$$\frac{\mu'}{\rho} = \alpha = \text{const}. \tag{8}$$

Второе уравнение (7) с учетом соотношения (8) преобразуется к виду

$$(\lambda + 2\mu)\mu'' - 2\mu'^2 = 0. \tag{9}$$

Если коэффициент Пуассона [1] $\sigma = \lambda(z)[2\lambda(z) + 2\mu(z)]^{-1}$ — постоянная величина, то интегрирование уравнения (9) дает

$$\mu(z) = \mu(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что этот случай соответствует степенной зависимости ρ, λ, μ, рассмотренной в работе [5].

Если параметр λ не зависит от z ($\lambda = \text{const}$), то из уравнений (8), (9) следует $\mu(z) = a\exp(bz) - \frac{\lambda}{2}$, $\rho(z) = ab\,\alpha^{-1}\exp(bz)_1$ (a, $b = \text{const}$). Этот случай близок к случаю экспоненциальной зависимости ρ, λ, μ от z: $\rho = \rho(z_0)\exp(bz)$, $\lambda = \lambda(z_0)\exp(bz)$, $\mu = \mu(z_0)\exp(bz)$, рассмотренному в работах [7, 8].

Рассмотрим еще один пример, когда известна (или задана) скорость продольных волн $c(z) = [\rho(z)]^{-1/2}[\lambda(z) + 2\mu(z)]^{+1/2}$ и требуется найти такие $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, чтобы условия (8), (9) удовлетворялись. Опуская несложные выкладки, получим для μ, λ, ρ выражения

$$\mu = \int_a^z \exp\left[2\alpha\int_b^z c^{-2}(z)\,dz\right]dz, \quad \lambda = c^2(z)\,\alpha^{-1}\mu'(z) - 2\mu(z), \quad \rho = \mu'(z)\,\alpha^{-1}. \tag{11}$$

Таким образом, для упругой среды с заданным законом изменения скорости продольных волн всегда можно найти такие $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, чтобы условия (8), (9) выполнялись и в среде могли распространяться такие продольные волны, которые не возбуждают поперечных.

Наконец, если условия (8), (9) выполняются, то при $T \equiv 0$ величина S удовлетворяет первому уравнению системы (3), которое удобно записать в виде

$$L_\rho S + \frac{\omega^2}{2\alpha} S - S' = 0. \tag{12}$$

Связь между φ и S, выраженную равенством (2), представим в виде

$$S = 2\alpha\rho L_\rho \varphi. \tag{13}$$

При этом L_ρ—дифференциальный оператор $L_\rho = \frac{\rho}{\rho'}\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2\right)$, действие которого на некоторую функцию $\chi(z)$ заключается в образовании выражения $L_\rho \chi(z) = \frac{\rho}{\rho'}\left[\chi''(z) - \xi^2\chi(z)\right]$. Подставляя выражение (13) в формулу (12), имеем

$$L_\rho(\rho L_\rho \varphi) + \rho\frac{\omega^2}{2\alpha} L_\rho \varphi - \frac{d}{dz}(\rho L_\rho \varphi) = 0. \tag{14}$$

Используя непосредственно проверяемое равенство $L_\rho(\rho L_\rho \chi) - \frac{d}{dz}(\rho L_\rho \chi) = \rho L_\rho(L_\rho \chi) + \rho L_\rho \chi'$, уравнение (14) можно написать так:

$$L_\rho L_\rho \varphi + \frac{\omega^2}{2\alpha} L_\rho \varphi + L_\rho \varphi = 0. \tag{15}$$

Если не рассматривать такие φ, для которых $L_\rho \varphi = 0$ (при этом $\mathbf{U} \equiv 0$, как это показано в работах [4, 5], то для φ мы имеем уравнение $L_\rho \varphi + \frac{\omega^2}{2\alpha}\varphi + \varphi' = 0$, или

$$\varphi'' + \frac{\rho'}{\rho}\varphi' + \left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\frac{\rho'}{\rho} - \xi^2\right)\varphi = 0. \tag{16}$$

В качестве примера рассмотрим случай линейного изменения логарифмической производной плотности: $\frac{d}{dz}\ln\rho = \frac{\rho'}{\rho} = az + b$. Тогда для $\mu(z)$, $\lambda(z)$ имеем выражения: $\mu(z) = \mu(z_0) + \alpha\int\limits_{z_0}^{z}\rho(z)\,dz$, $\lambda = \frac{2\alpha\rho^2(z)}{\rho'} - 2\mu(z)$, где $\rho(z) = \rho(z_0)\exp\left[\frac{a}{2}(z - z_0)^2 + b(z - z_0) + az_0 z\right]$. Уравнение (16) имеет общее решение:

$$\varphi = \exp\left(-\frac{az^2}{4} - \frac{bz}{2}\right)[C_1 D_n(\zeta) + C_2 D_n(-\zeta)], \tag{17}$$

где $n = \omega^4/4a\alpha^2 - \xi^2/a^{+\frac{1}{2}}$, $\zeta = a^{-\frac{1}{2}}[az + b - \omega^2\alpha^{-1}]$, $D_n(\zeta)$ — функция параболического цилиндра, удовлетворяющая уравнению Вебера [6]:

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\zeta^2}{4}\right)y = 0.$$

Интересен также случай, когда $\xi = \frac{\omega^2}{2\alpha}$ и общее решение уравнения (16) может быть написано для произвольных $\rho(z)$ в виде [9]

$$\varphi = C_1 e^{-\xi z} + C_2 e^{-\xi z}\int\limits^{z}\frac{e^{2\xi z}}{\rho(z)}\,dz. \tag{18}$$

Частное решение $C_1 e^{-\xi z}$ соответствует такому смещению, для которого $\nabla\mathbf{U} = 0$ (напомним, что $\nabla\times\mathbf{U} = 0$ при $T = 0$) и поэтому продольные волны, представляющие единственный вид движения в предположении $T \equiv 0$, будут определяться только вторым слагаемым в решении (18) так, что $\nabla\mathbf{U} = \nabla\varphi = -C_2\frac{\rho'}{\rho}e^{\xi z}$.

В заключение отметим, что некоторые результаты о независимых величинах (эти величины не всегда являются потенциалами смещения), представляющих вектор сме-

щения в упругой неоднородной среде, получены в работах [3, 5]. Однако в этих работах исследовались только слоисто-неоднородные среды с постоянным коэффициентом Пуассона σ. Изложенный метод позволяет рассмотреть более общий случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ. 1955.
2. I. Keller, F. Karnel. Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. J. Acoust. Soc. America, 1959, **31**, 6, 694—706.
3. I. F. Hook. Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic media. J. Acoust. Soc. America, 1961, **33**, 3, 302—313.
4. В. Ю. Завадский. Потенциалы смещения упругой слоисто-неоднородной среды. Акуст. ж., 1964, **10**, 3, 289—292.
5. В. Ю. Завадский. О волновом движении в упругой слоисто-неоднородной среде со степенным законом изменения плотности и параметров Ламе. Акуст. ж., 1964, 10, 1, 119—122.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. М. ИЛ., 1962.
7. Н. Н. Зволинский. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве частного типа. Изв. АН СССР, сер. геофизич., 1945, 9, 3.
8. M. H. Lock. Axially symmetric elastic waves in an unbounded inhomogeneous medium with exponentially varying properties. Bull. Seismol. Soc. America, 1963, **53**, 3, 527—538.
9. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М, ИЛ, 1951.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 мая 1964 г.

УДК 534.64 . 620,111.3

ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ ОБЪЕМНОЙ УПРУГОСТИ ТКАНЕЙ ЖИВОТНЫХ

Л. П. Лебедева

Известно, что наличие в водной морской среде различного рода организмов, в силу их большого числа, может оказать заметное влияние на средние акустические параметры водной среды и в особенности, на условия рассеяния звука.

Существующие сведения о собственных акустических свойствах морских организмов довольно скудны. Поэтому представляло интерес исследовать экспериментально эти свойства, в частности, с точки зрения средней акустической сжимаемости.

Для экспериментов мы воспользовались методом Майера и Тамма [1]. Измерения проводились в герметизированной стеклянной трубе, наполненной морской водой, при атмосферном давлении и при избыточном давлении 2,5 *ат*. Опыты проводились на частоте около 900 *гц*. Обезгаживание воды как таковой и вместе с погруженным исследуемым объектом осуществлялось путем длительного отстоя с неоднократным сбросом избыточного давления и путем вакуумирования.

Процесс измерения сводился к следующему. В трубе создавалась стоячая звуковая волна и определялась резонансная частота f_0 столба воды. Затем в пучности давления на тонкой проволоке подвешивался исследуемый объект и находилась новая резонансная частота f_R. Модуль объемной упругости объекта $E' = E(1 - i\eta)$ рассчитывался по формуле:

$$E = \rho c^2 \frac{f_0 V'}{\delta f V (1 + \eta^2)} .$$

Здесь ρc^2 — модуль объемной упругости воды, δf — изменение резонансной частоты, V' — объем образца, V — объем столба воды, η — затухание в образце, вычисляемое по формуле $\eta = \frac{\Delta f_R - \Delta f_0}{2\delta f}$, где Δf_0 — полуширина резонансной кривой столба воды, Δf —то же для столба воды с объектом. При малых η можно полагать $E = \rho c^2 \times \times \frac{f_0 V'}{\delta f V}$, относительный модуль упругости выражается так:

$$E'' = \frac{E}{\rho c^2} = \frac{f_0 V'}{\delta f V} .$$