АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 1

УДК 534.121.1/.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

С. В. Нестеров

Рассматриваются нелинейные явления при колебаниях пластинки при наличии отклонений от закона Гука. Построены резонансные кривые и установлено, что при точном резонансе амплитуда колебаний остается ограниченной.

Будем рассматривать колебания с конечной амплитудой закрепленной по краям круглой пластинки под действием осе-симметричной периодической силы. Предполагается, что амплитуда колебаний такова, что сохраняются геометрические соотношения линейной теории упругости, а напряжения являются нелинейными функциями деформаций.

Используя результаты, полученные Каудерером [1] для статической деформации пластинки, можно написать уравнение нелинейных осе-симметричных вынужденных колебаний пластинки с учетом отклонений от закона Гука до членов 3-го порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Gh^3}{\rho 6}\left[\frac{\Delta\Delta w}{1-\nu_0}+\lambda\Delta\Delta w+2\frac{d\lambda}{dr}\frac{d}{dr}(\Delta w)+\left(\frac{d^2\lambda}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mu}{dr}\right)\frac{d^2w}{dr^2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}+\frac{d^2\mu}{dr^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]=\varepsilon F(r)\sin\Omega t, \qquad (1)$$

где w — смещение частиц пластинки, ε — малая амплитуда вынуждающей силы.

Величины λ и μ, согласно работе [1], определяются соотношениями:

$$\lambda=\frac{2h^2}{45}\left[(2\nu_1^2\gamma_2+\nu_3^2\varkappa_2)\left(w''^2+\frac{w'^2}{r^2}\right)+2(\nu_1\nu_2\gamma_2+\nu_3^2\varkappa_2)\frac{w'w''}{r}\right],$$

$$\mu=\frac{2h^2}{45}(\nu_1\nu_2\gamma_2+\nu_3^2\varkappa_2)\left(w''^2+\frac{w'^2}{r^2}\right)+(\nu_2^2\gamma_2+2\nu_3^2\varkappa_2)\frac{w'w''}{r}\Bigg],$$

$$\nu_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{3K-2G}{3K+G},\quad \nu_1=\frac{\nu_0}{(1-\nu_0)^2}+1;\quad \nu_2=\frac{2\nu_0}{(1-\nu_0)^2}-1,$$

$$\nu_3^2=\frac{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)^3}{8(1-\nu_0)^4}$$

Постоянные K и G — соответственно объемный и сдвиговый модули упругости, h — толщина, ρ — плотность пластинки. Отклонения от закона Гука характеризуются постоянными γ_2 и $\varkappa_2$, которые определяются свойствами материала пластинки.

Уравнение (1) мы будем интегрировать при краевых условиях:

$$w(a,t)=\frac{\partial w}{\partial r}(a,t)=0 \tag{2}$$

и искать решение в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/3}$, применяя метод Боголюбова [2]:

$$w=\varepsilon^{1/3}w_1(A,\Omega t+\vartheta,r)+\varepsilon^{2/3}w_2(A,\Omega t+\vartheta,r)+\varepsilon w_3+\ldots, \tag{3}$$

где A и ϑ — функции t, определяемые системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt}&=\varepsilon^{1/3}A_1(A,\vartheta)+\varepsilon^{2/3}A_2(A,\vartheta)+\cdots,\\ \frac{d\vartheta}{dt}&=\omega-\Omega+\varepsilon^{1/3}B_1(A,\vartheta)+\varepsilon^{2/3}B_2(A,\vartheta)+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Неизвестные функции $A_i(A,\vartheta)$ и $B_i(A,\vartheta)$, согласно методу Н. Н. Боголюбова, могут быть однозначно определены из условия периодичности решения w по переменной $\psi=\Omega t+\vartheta$.

Вычисляя производную $\partial^2 w/\partial t^2$ с помощью соотношений (4), мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\varepsilon^{1/3}\omega^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}+\varepsilon^{2/3}\Big[\omega^2\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}+2\omega B_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}+(\omega-\Omega)\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial A}+\\ +2\omega A_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial A\partial\psi}+(\omega-\Omega)\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\Big]+\varepsilon\Big[\omega^2\frac{\partial^2 w_3}{\partial\psi^2}+2\omega B_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}+\\ +(\omega-\Omega)\frac{\partial A_2}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial A}+2\omega A_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial A\partial\psi}+(\omega-\Omega)\frac{\partial B_2}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+\\ +\frac{\partial B_1}{\partial A}A_1\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+B_1\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+\frac{\partial A_1}{\partial A}A_1\frac{\partial w_1}{\partial A}+2\omega B_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}+\\ +(\omega-\Omega)\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial A}+2\omega A_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial A\partial\psi}+(\omega-\Omega)\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial\psi}+B_1\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial A}\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя ряды (3) и (5) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}+\frac{Gh^3}{6\rho(1-\nu_0)}\Delta\Delta w_1=0,\\ &w_1(a,\psi)=\frac{\partial w_1}{\partial r}(a,\psi)=0;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}+\frac{Gh^3}{6\rho(1-\nu_0)}\Delta\Delta w_2=\\ &=-\Big[2\omega B_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\psi^2}+(\omega-\Omega)\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial A}+2\omega A_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial A\partial\psi}+(\omega-\Omega)\frac{\partial B_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\Big],\\ &w_2(a,\psi)=\frac{\partial w_2}{\partial r}(a,\psi)=0;\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\omega^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial \psi^2} + \frac{Gh^3}{6\rho(1-\nu_0)} \Delta\Delta w_3 = -\Big\langle 2wB_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} + (\omega-\Omega)\frac{\partial A_2}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial A} + \\
&+ 2\omega A_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial A \partial \psi} + (\omega-\Omega)\frac{\partial B_2}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial B_1}{\partial A}\cdot A_1 \frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta}\cdot B_1 \frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{\partial A_1}{\partial A}\cdot A_1 \frac{\partial w_1}{\partial A} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial A} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} + (\omega-\Omega)\cdot\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial A} + \\
&+ 2\omega A_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial A \partial \psi} + (\omega-\Omega)\frac{\partial B_1}{\partial \vartheta}\frac{\partial w_2}{\partial \psi} + \frac{Gh^3}{6\rho}\Big[\lambda_1 \Delta\Delta w_1 + 2\frac{d\lambda_1}{dr}\cdot\frac{d}{dr}(\Delta w_1) + \\
&\quad + \left(\frac{d^2\lambda_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mu_1}{dr}\right)\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{d\lambda_1}{dr} + \frac{d^2\mu_1}{dr^2}\right)\frac{1}{r}\frac{dw_1}{dr}\Big]\Big\rangle + \\
&\quad + F(r)\sin(\psi-\theta), \\
&w_3(a,\psi) = \frac{\partial w_3}{\partial r}(a,\psi) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (8)
$$

где λ_1 и μ_1 есть результат подстановки w_1 в равенства, определяющие λ и μ.

Периодическое по ψ решение краевой задачи (6) имеет вид

$$w_1 = A[I_0(\gamma a)I_0(\gamma r) - I_0(\gamma a)I_0(\gamma r)]\cos\psi = A\varphi_\gamma(r)\cos\psi,$$

где γ корень уравнения $I_0(\gamma a)I_1(\gamma a) + I_0(\gamma a)I_1(\gamma a) = 0$. Собственная частота ω колебаний бесконечно малой амплитуды определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{Gh^3}{6\rho(1-\nu_0)}\gamma^4.$$

Для определенности будем считать $a\gamma = a\gamma_0 \simeq 3{,}1961...$

Поскольку ищется решение, периодическое по ψ, то в краевой задаче (7) следует положить $A_1 \equiv B_1 \equiv 0$. Далее, в духе асимптотических методов будем считать, что основная гармоника $A\varphi_{\gamma 0}(r)\cos\psi$ содержится в первом приближении и положим поэтому $w_2 \equiv 0$.

Мы не будем вычислять функцию w_3 в явном виде, но потребуем, чтобы w_3 была периодической функцией ψ. Для этого достаточно выбрать A_2 и B_2 таким образом, чтобы в первой части уравнения (8) уничтожались резонансные гармоники вида $\varphi_{\gamma_0}(r)\cos\psi$, $\varphi_{\gamma_0}(r)\sin\psi$. Разложив правую часть уравнения (8) в ряд Фурье по функциям $\varphi_\gamma(r)\cos n\psi$, $\varphi_\gamma(r)\sin n\psi$ и приравнивая нулю коэффициенты, стоящие при гармониках $\varphi_{\gamma_0}(r)\cos\psi$, $\varphi_{\gamma_0}(r)\sin\psi$, мы увидим, что резонансные члены в третьем приближении уничтожаются, если неизвестные функции A_2 и B_2 удовлетворяют соотношениям:

$$
\left.\begin{aligned}
&(\omega-\Omega)\frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2\omega A B_2 = -\frac{3}{4}\beta A^3 - \alpha\sin\vartheta, \\
&2\omega A_2 + (\omega-\Omega)A\frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} = \alpha\cos\vartheta,
\end{aligned}\right\} \qquad (9)
$$

где

$$\alpha = \frac{\int_0^a F(r)\varphi_{\gamma 0}(r)\,r\,dr}{\|\varphi_{\gamma 0}\|^2}, \qquad \|\varphi_{\gamma 0}\|^2 = \int_0^a \varphi_{\gamma 0}^2 r\,dr = a^2 I_0^2(\gamma_0 a)\,I_0^2(\gamma_0 a),$$

$$\beta = \frac{h^5 G}{\|\varphi_{\gamma 0}\|^2 135} \Big\langle (2\nu_1^2\gamma_2 + \nu_3^2\varkappa_2) \int_0 \Big\{ \Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \Delta\Delta\varphi_{\gamma 0} +$$

$$+ 2\frac{d}{dr}\Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \frac{d}{dr} \Delta\varphi_{\gamma 0} + \frac{d^2}{dr^2}\Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \frac{d^2\varphi_{\gamma 0}}{dr^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \frac{d\varphi_{\gamma 0}}{dr} \Big\} \varphi_{\gamma 0} r dr +$$

$$+ (\nu_1\nu_2\gamma_2 + \nu_3^2\varkappa_2) \int_0^a \Big\{ \frac{2\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}''}{r} \Delta\Delta\varphi_{\gamma 0} + 4\frac{d}{dr}\Big(\frac{\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}''}{r} \Big) \frac{d}{dr} \Delta\varphi_{\gamma 0} +$$

$$+ 2\frac{d^2}{dr^2}\Big(\frac{\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}'''}{r} \Big) \varphi_{\gamma 0}'' + \frac{2}{r}\Big(\frac{\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}''}{r} \Big) \varphi_{\gamma 0}' +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \varphi_{\gamma 0}'' + \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\Big(\varphi_{\gamma 0}''^2 + \frac{\varphi_{\gamma 0}'^2}{r^2} \Big) \varphi_{\gamma 0}' \Big\} \varphi_{\gamma 0} r dr +$$

$$+ (\nu_2^2\gamma_2 + 2\nu_3^2\varkappa_2) \int_0^a \Big\{ \frac{d}{dr}\Big(\frac{\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}''}{r} \Big) \varphi_{\gamma 0}'' +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\Big(\frac{\varphi_{\gamma 0}'\varphi_{\gamma 0}''}{r} \Big) \varphi_{\gamma 0}' \Big\} \varphi_{\gamma 0} r dr \Big\rangle .$$

Поскольку написанные интегралы в конечном виде не вычисляются, то для оценки β можно построить приближенное представление функции φ_{γ_0} в виде полинома 4-ой степени, применяя метод Галёркина для краевой задачи $\Delta\Delta u + \lambda u = 0$, $u = du / dr_{r=d} = 0$. Грубая оценка β получается, если заменить подынтегральные функции их максимумами. Решением системы (9) являются функции $A_2 = -\alpha(\omega + \Omega)\cos\vartheta$, $B_2 = (3/8\omega)\beta A^2 + \alpha\sin\vartheta / (\omega + \Omega)A$. Подставляя найденные A_1, B_1, A_2 и B_2 в систему (4), получим

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon^{2/3}\alpha}{\omega + \Omega}\cos\vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \Omega + \frac{\varepsilon^{2/3}\alpha}{A(\omega + \Omega)} \cdot \sin\vartheta + \frac{3\varepsilon^{2/3}}{8\omega}\beta A^2. \qquad (10)$$

Эта система уравнений интегрируется в квадратурах с помощью эллиптических функций; получаемое таким образом решение имеет медленно изменяющиеся во времени амплитуду $A(t)$ и фазу $\vartheta(t)$.

Не приводя весьма громоздких формул, выражающих зависимость амплитуды и фазы от времени, укажем основные свойства функции $A(t)$, $\vartheta(t)$.

1. При любых начальных условиях амплитуда $A(t)$ остается ограниченной.

2. В зависимости от начальных условий фаза $\vartheta(t)$ изменяется либо монотонно, либо периодически.

3. Существует одно решение (сепаратрисса), которое отделяет области решений с монотонно изменяющейся фазой от области решений с периодически изменяющейся фазой.

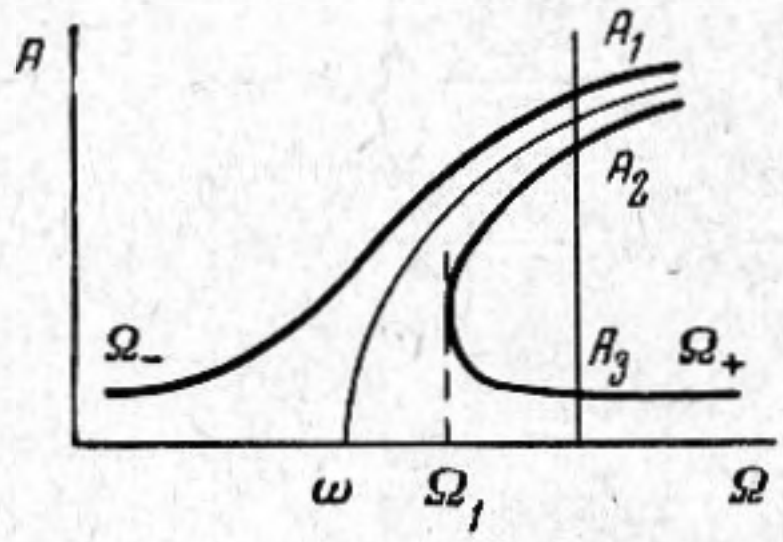
Представляет интерес рассмотреть стационарные решения системы (10), т. е. такие решения, когда фаза и амплитуда остаются постоянными. Приравнивая нулю производные $dA / dt = 0$, $d\vartheta / dt = 0$, найдем стационарные значения амплитуды и фазы:

$$\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \omega - \Omega \pm \frac{\varepsilon^{2/3}\alpha}{A(\omega + \Omega)} + \frac{\varepsilon^{2/3} \cdot 3\beta A^2}{8\omega} = 0. \qquad (11)$$

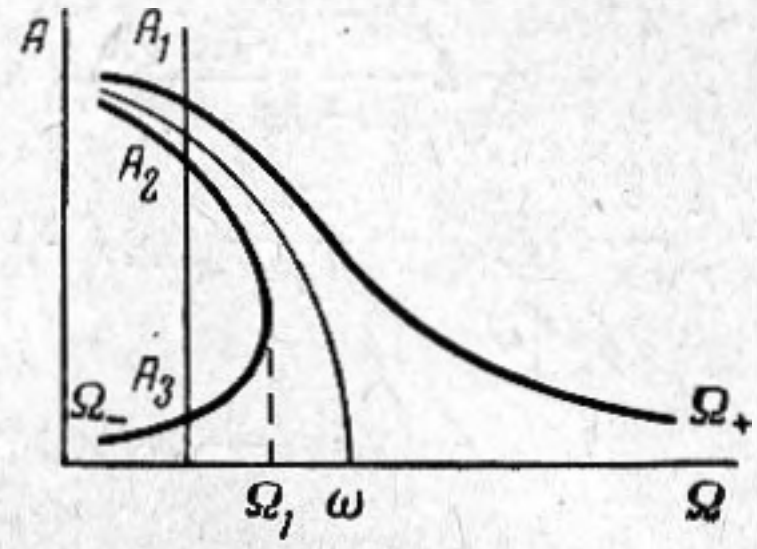
Соотношение (11) представляет собой две ветви резонансной кривой (зависимость между амплитудой колебаний и частотой внешней силы) и его можно с точностью до высших степеней ε переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \Omega_+ &= \omega + \frac{\varepsilon^{2/3}\alpha}{2\omega A} + \frac{\varepsilon^{2/3}\cdot 3\beta A^2}{8\omega}, \\ \Omega_- &= \omega - \frac{\varepsilon^{2/3}\alpha}{2\omega A} + \frac{\varepsilon^{2/3}\cdot 3\beta A^2}{8\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Полученная резонансная кривая (12) совпадает с хорошо известной резонансной кривой уравнения Дуффинга [1]. На фиг. 1 представлена



Фиг. 1



Фиг. 2

резонансная кривая для случая $\beta > 0$; резонансная кривая для случая $\beta < 0$ приведена на фиг. 2.

Следует отметить, что при точном резонансе ($\omega = \Omega$) амплитуда остается конечной: $A = \sqrt[3]{4\alpha / 3\beta}$. Для частот $\Omega < \Omega_1 = \omega + (9\varepsilon^{2/3} / 16\omega)\sqrt[3]{3\beta\alpha^2}$ существует одно значение стационарной амплитуды ($\vartheta = -\pi / 2$). Для частот $\Omega > \Omega_1$ существуют три значения стационарных амплитуд $A_1 (\vartheta = -\pi / 2)$; A_2, A_3 ($\vartheta = \pi / 2$).

Используя результаты по устойчивости стационарных амплитуд, полученные в работе [2], мы приходим к следующим выводам:

1. Случай $\beta > 0$; если частота возрастает от значений $\Omega < \Omega_1$, то амплитуда изменяется по кривой Ω_-. Если частота убывает от значений $\Omega > \Omega_1$, то амплитуда изменяется по нижней ветви кривой Ω_+. В точке $\Omega = \Omega_1$ происходит скачок амплитуды до значения, определяемого кривой Ω_+. Амплитуда, определяемая верхней ветвью кривой Ω_+, неустойчива.

2. Случай $\beta < 0$: если частота убывает от значений $\Omega > \Omega_1$, то амплитуда изменяется по кривой Ω_+. Если частота возрастает от значений $\Omega < \Omega_1$, то амплитуда изменяется по нижней ветви кривой Ω_-. В точке $\Omega = \Omega_1$, происходит скачок амплитуды до значения, определяемого кривой Ω_+. Амплитуда, определяемая верхней ветвью кривой Ω_+, неустойчива.

Изложенный метод можно применить к рассмотрению субгармонического резонанса на частоте $\Omega / 3$. Для этого нужно вычислить в явном виде приближение w_3, а также исследовать влияние сил трения порядка ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Каудерер. Нелинейная механика. М., ИЛ., 1961.
2. Н. И. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 9 марта 1964 г.