АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 1

УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

С. А. Рыбак

Строится метод возмущений в задаче рассеяния, пригодный для волновых чисел, лежащих в области брэгговского отражения от периодической структуры. Метод имеет общие черты с теорией возмущений при наличии вырождения. Главная часть рассеянного поля учитывается в нулевом приближении.

При распространении плоской волны в среде, параметры которой испытывают малое периодическое изменение вдоль одной из координат, возможны условия типа условий брэгговского отражения, когда рассеянное поле велико: амплитуда рассеянного поля имеет тот же порядок, что и амплитуда первичной волны. В этом случае при определении рассеянного поля стандартный метод малых возмущений неприменим из-за расходимости в первом или старших приближениях.

Ниже предложен метод возмущений, пригодный в области брэгговского отражения, основная черта которого в том, что главная часть рассеянного поля учитывается в нулевом приближении. Метод имеет общие черты с теорией возмущений при наличии вырождения [1, 2].

Существо метода может быть выяснено на примере решения одномерного уравнения Гельмгольца

$$\varphi_{xx} + k_0^2(1 + \varepsilon u(x))\varphi = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \ll 1$. На функцию $u(x)$, которую будем считать вещественной, наложены условия: при $x < a$ $u(x) = 0$; при $x > a$ $u(x) = u(x + nd)$, $n = 1, 2, \ldots$. Разложим $u(x)$ на периоде d в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_q e^{iqx} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{-q} e^{-iqx}; \quad q = 2\pi n / d.$$

Пусть из области $x < a$ распространяется волна вида e^{ik_0x}, где $\omega = ck_0$ — частота вынужденных колебаний. Множитель $e^{-i\omega t}$ подразумевается. Требуется определить поле φ при следующих граничных условиях:

1. В точке $x = a$ решение должно быть сшито с решением для однородной области $x < a$. Условия сшивки:

$$\varphi|_{a+0} = \varphi|_{a-0}; \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{a+0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{a-0}. \tag{2}$$

2. При $x \to \infty$ накладываются обычные условия излучения и ограниченности решения [3].

Будем искать решение уравнения (1) в области $x > a$ при заданном k_0^2 в виде суммы двух линейно независимых частных решений с произвольными постоянными амплитудами A, B: $\varphi = A\varphi_1 + B\varphi_2$. Коэффициенты определятся из указанных выше граничных условий. В области $x < a$.

$$\varphi = e^{ikx} + \mathrm{R}e^{-ikx}. \tag{3}$$

Если $2k_0$ не слишком близко ни к одному из значений $q = 2\pi n / d$, то применима обычная теория возмущений. Нулевое приближение выбираем в форме

$$\varphi_0 = e^{ik_0x}. \tag{3а}$$

Для добавки первого приближения $\tilde{\varphi}_1$ мы получим уравнение $\tilde{\varphi}_1'' + k_0^2\tilde{\varphi}_1 = -\varepsilon k_0^2 u(x) e^{ikx}$, и условием применимости метода малых возмущений является выполнение неравенства

$$\left| \frac{\varepsilon k_0^2 u_q}{-(q+k_0)^2 + k_0^2} \right| \ll 1.$$

При приближении k_0 к значению $-q/2$ это неравенство нарушается и обычная форма нулевого приближения становится неприменимой.

Будем искать нулевое приближение в форме

$$\varphi_0 = Ae^{i(k_0+\varkappa)x} + Be^{-i(q-k_0-\varkappa)x}, \tag{4}$$

где $\varkappa \ll k_0$. Величины $\varkappa$ и B/A определим из того требования, чтобы добавка первого приближения не содержала членов нулевого порядка по ε. Пусть k_0 находится в окрестности $q/2$; $k_0 = q/2 + \lambda$; $\lambda \ll q/2$

$$k_0 + \varkappa = q/2 + \lambda + \varkappa = q/2 + \delta; \qquad \delta \ll q/2.$$

Тогда на основании формулы (4) можно написать

$$\varphi = Ae^{i(q/2+\delta)x} + Be^{-i(q/2-\delta)x}; \qquad k_0^2 = q^2/4 + q\lambda. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы амплитуды при экспонентах $e^{i(q/2+\delta)x}$ и $e^{-i(q/2-\delta)x}$ в правой части уравнения для добавки первого приближения обращались в нуль. Тогда мы получим уравнения для A и B:

$$(\delta q - q\lambda) A + \frac{q^2}{4} \varepsilon u_q B = 0;$$

$$\frac{q^2}{4} \varepsilon u_{-q} A - (\delta q + q\lambda) B = 0.$$

Условие совместности этих уравнений дает для δ два значения: δ_+ и δ_-, где

$$\delta_\pm = \pm \sqrt{\lambda^2 - \frac{q^2}{16} \varepsilon^2 |u_q|^2}. \tag{6}$$

В этой формуле учтено, что в силу вещественности $u(x)$: $u_q^* = u_{-q}$. Следовательно,

$$\frac{B}{A} = R^\pm = \varepsilon \frac{q/4\, u_{-q}}{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - q^2 \frac{\varepsilon^2}{16} |u_q|^2}}. \tag{7}$$

Обозначив далее $u_{-q} = |u_q| e^{-i\theta}$, получим

$$R^+ \cdot R^- = e^{-2i\theta}. \tag{8}$$

Два линейно независимых частных решения уравнения (1) в нулевом приближении имеют вид

$$\varphi_1 = e^{i\delta_+ x}(e^{iq/2\, x} + R^+ e^{-iq/2\, x}); \tag{9а}$$

$$\varphi_2 = e^{-i\delta_+ x}(e^{iq/2\, x} + R^- e^{-iq/2\, x}). \tag{9б}$$

Общее решение определяется как сумма частных решений с произвольными амплитудами $\varphi = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$. Проанализируем полученные результаты в различных частных случаях.

1. Пусть $|\lambda| < \varepsilon \frac{q}{4} |u_q|$, что соответствует полосе непропускания. При этом δ_+ — мнимо, $|R^{\pm}| = 1$; положим $R^+ = e^{i\psi}$ при $\lambda > 0$ и $R^+ = e^{i(\psi+\pi)}$ при $\lambda < 0$. Решение (9) в этом случае сводится к виду:

$$\varphi_1 = A_1 e^{-|\delta_+|x} \cos\left(\frac{q}{2} x - \frac{\psi}{2}\right), \tag{10а}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{|\delta_+|x} \cos\left(\frac{q}{2} x + \theta + \frac{\psi}{2}\right) \tag{10б}$$

при $\lambda > 0$. При $\lambda < 0$, т. е. при смещении в сторону меньших частот от центра полосы непропускания, получим

$$\varphi_1 = A_2 e^{|\delta_+|x} \sin\left(\frac{q}{2} x - \frac{\psi}{2}\right), \tag{11а}$$

$$\varphi_2 = A_1 e^{-|\delta_+|x} \sin\left(\frac{q}{2} x + \theta + \frac{\psi}{2}\right). \tag{11б}$$

Решения (10) и (11) представляют собой стоячие волны с экспоненциально спадающей амплитудой. При условии ограниченности решения получим $A_2 = 0$. Рассматриваемый случай соответствует полосе непропускания, поскольку в области $x > a$ отсутствует бегущая волна и существует лишь неоднородная волна, экспоненциально спадающая в направлении распространения. При этом модуль коэффициента отражения $|R|$ равен единице, так что в полосе непропускания рассеянное поле является величиной одного порядка с падающим полем, а не величиной порядка ε. Это делает неприменимой обычную теорию возмущений.

2. Пусть далее $\lambda = \frac{q}{4} \varepsilon |u_q|$, что отвечает границе полосы непропускания. При этом $\delta_+ = 0$ и $\psi = -\theta$, поскольку знаменатель в выражении (7) становится действительным. Границе полосы непропускания соответствуют два линейно независимых решения уравнения (1) в виде стоячих волн

$$\psi_1 = A_1 \cos(q/2x + \theta/2),$$
$$\psi_2 = A_2 x \cos(q/2x + \theta/2) \tag{12}$$

для верхней границы полосы, и

$$\psi_1 = A_1 \sin(q/2x + \theta/2),$$
$$\psi_2 = A_2 x \sin(q/2x + \theta/2)$$

для нижней границы. Амплитуда ψ_2 растет линейно с координатой x. Это решение, следовательно, должно быть отброшено в случае полуограниченной области.

3. $|\lambda| > \frac{q}{4} \varepsilon |u_q|$; этот случай соответствует полосе пропускания Здесь δ_+ — действительно и $|R^+| < 1$, $|R^-| > 1$. Аргумент R^+ совпадает с аргументом u_{-q}: $\psi = -\theta$. Учтя соотношение (8), получим $R^+ = R_0^+ e^{-i\theta}$, $R^- = \frac{1}{R_0^+} e^{-i\theta}$. В качестве линейно независимых решений в этом случае можно выбрать

$$\varphi_1 = e^{i\delta_+ x} \left(e^{i\frac{q}{2}x} + R_1^+ e^{-i\frac{q}{2}x}\right) \tag{13}$$

и выражение комплексно сопряженное ($\varphi_2 = \varphi_1^*$).

Поскольку $|R^+| < 1$, имеет место перенос энергии в направлении распространения первичной волны, так что рассматриваемая область является областью пропускания. При дальнейшем увеличении $|\delta|$ (при уходе от

середины полосы непропускания) R_1 становится величиной порядка ε и решение (5) переходит в (3а). Строго говоря, рассматриваемый выше способ решения здесь неприменим, поскольку мы пользовались условием $|\lambda|, |\delta| \ll q/2$. Пусть теперь λ порядка q. Нулевое приближение попрежнему ищется в форме (4), где $\varkappa$ мало и должно быть найдено вместе с отношением B/A из условия обращения в нуль коэффициентов при $e^{i(k_0+\varkappa)x}$ и $e^{-i(q-k_0-\varkappa)x}$ в правой части уравнения для добавки первого приближения. При этом мы получим систему уравнений

$$-2\varkappa k_0 A + k_0^2 \varepsilon u_q B = 0,$$

$$k_0^2 \varepsilon u_q A - [q^2 - 2k_0 q] B = 0. \tag{14}$$

Из условия совместности этих уравнений находим

$$\varkappa = \frac{\varepsilon^2 |u_q|^2 k_0^3}{2(q^2 - 2k_0 q)},$$

откуда $\dfrac{B}{A} = \dfrac{|u_q|^2}{u_q} \dfrac{k_0^2}{(q^2 - 2k_0 q)} \varepsilon,$

т. е. B/A есть величина порядка ε и в нулевом приближении должна приниматься равной нулю. Мы показали, таким образом, что при удалении k_0 от центра полосы непропускания $q/2$ нулевое приближение выражения для поля в области $x > a$ переходит в выражение (3а), и становится пригодной обычная теория возмущений.

Таким образом, мы проанализировали общее решение системы (9) в тех характерных случаях, когда k_0 находится в полосе непропускания и вне таковой. Решение же задачи при граничных условиях (2) имеет в нулевом приближении вид $\varphi = e^{ik_0x} + \mathrm{R}e^{-ik_0x}$ при $x < a$ и $\varphi = Ae^{i\delta_+ x}(e^{iq/2x} + R^+ e^{-iq/2x})$ при $x > a$.

Величина δ_+ определяется из формулы (6), а R^+ из формулы (7). При этом

$$A = \frac{2ike^{ika}}{ika_1 + a_2}; \quad R = \frac{e^{2ika}(ika_1 - a_2)}{ika_1 + a_2},$$

где

$$a_1 = e^{i\delta_+ a}(e^{iq/2\,a} + R^+ e^{-iq/2\,a});$$

$$a_2 = i(\delta_+ + q/2)\, e^{i(\delta_+ + q/2)a} + R^+ i\left(\delta_+ - \frac{q}{2}\right) e^{i(\delta_+ - q/2)a}.$$

Общий анализ, проведенный выше, разумеется, вполне пригоден и в этом частном случае.

Автор выражает благодарность Б. Д. Тартаковскому, А. М. Дыхне и И. А. Урусовскому за обсуждение работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1, гл. 5. М., ГТТИ, 1945.
2. Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959, §§ 34—36.
3. Г. Д. Малюжинец. Дифракция волн. Физический энциклопедический словарь, т. 1, М., 1960.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
24 июля 1963 г.