АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 2

УДК 534.231.1

УСРЕДНЕННОЕ ПОЛЕ В ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

Л. М. Бреховских

Найден закон распределения силы звука по сечению подводного звукового канала, справедливый на достаточно больших расстояниях. Сила звука предполагается усредненной по некоторой области пространства, в результате чего «смазывается» тонкая интерференционная структура поля. При теоретическом анализе это достигается некогерентным суммированием полей отдельных лучей или нормальных волн. Анализируется понятие характеристического расстояния r_0, определяющего силу звука при заданных горизонтах излучения и приема. Рассмотрены случаи звуковых каналов простейшей формы. Получены также формулы для вычисления r_0 в случае кусочно-линейной аппроксимации произвольного профиля скорости звука $c(z)$; проанализирован случай двухосевого звукового канала.

Введение. Звуковое поле в подводном звуковом канале обычно представляет собой суперпозицию большого числа лучей или нормальных волн. Амплитуда звукового давления при этом изменяется в пространстве весьма сложным образом. Имеет смысл различать четыре вида пространственной изменчивости звукового давления, каждый из которых обусловлен своей причиной:

а) изменчивость, вызванная интерференционной структурой звукового поля. Минимальный масштаб этой изменчивости равен по порядку величины λ / χ_{max}, где λ — длина волны, χ_{max} — максимальный угол скольжения лучей, захватываемых каналом;

б) изменчивость, вызванная зональной структурой звукового поля. Облученные зоны могут перемежаться с зонами геометрической тени, где в лучевом приближении сила звука равна нулю. Масштаб этого вида изменчивости составляет в океане обычно несколько десятков километров;

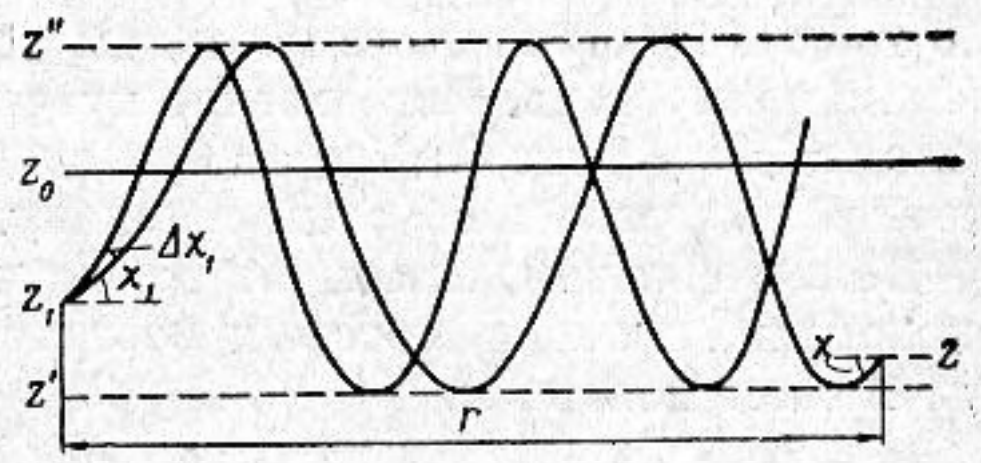
в) звуковое поле существенно изменяется также по сечению звукового канала. В частности, если излучатель расположен вблизи оси канала, то сила звука максимальна также в области, близкой к оси, и убывает при удалении от нее как вверх, так и вниз. Масштаб этого вида изменчивости по порядку величины совпадает с глубиной океана, а в случае приповерхностного звукового канала — с шириной канала;

г) наконец, звуковое поле убывает с расстоянием просто в силу цилиндрического расхождения волны, а также поглощения звуковой энергии в среде.

Во многих опытах по изучению распространения звука в океане интерференционная структура звукового поля не прослеживается. Поэтому мы здесь ею также не будем интересоваться. В теоретических расчетах она исключается, если предполагать отдельные лучи некогерентными, т. е. складывать соответствующие им потоки энергии. В результате получается в определенном смысле усредненное поле с «размазанной» интерференционной картиной. На достаточно больших расстояниях зональная структура поля также размазывается и с ней можно не считаться. В результате

на больших расстояниях мы будем иметь некий предельный закон спадания силы звука с расстоянием, с каким-то определенным распределением силы звука по сечению канала. Отысканию этого закона и посвящена настоящая работа *.

Мы будем предполагать излучение стационарным — монохроматическим или узкополосным шумовым. Получаемые результаты применимы также в случае широкополосного импульсного излучения (например, взрывной источник звука), если интересоваться интегральной по длительности всего сигнала энергией в узкой спектральной полосе.



Фиг. 1

Вывод основной формулы на базе лучевых представлений. Пусть скорость звука дается функцией $c(z)$, имеющей единственный минимум на уровне оси канала $z = z_0$. Излучатель пусть будет расположен на горизонте z_1 (фиг. 1). Рассмотрим луч, вышедший из излучателя под произвольным углом χ_1. Длина волны предполагается достаточно малой, чтобы были выполнены условия применимости лучевой акустики. Обозначим горизонты, на которых этот луч принимает горизонтальное направление, через z' и z''. Луч, вышедший под углом $\chi_1 + \Delta\chi_1$, где $\Delta\chi_1$ — конечная, но малая величина, будет заворачивать приблизительно на тех же горизонтах. Длина горизонтальных циклов рассматриваемых двух лучей также разнится мало. Однако всегда можно найти такое, достаточно большое расстояние от излучателя, на котором эти два луча разойдутся по горизонтали на целый цикл. Следовательно, в пределе, при $r \to \infty$ в любую точку слоя $z' \leqslant z \leqslant z''$ попадет какой-либо луч пучка, ограниченного рассмотренными двумя лучами.

Предположим сперва, что излучатель является ненаправленным. Его мощность обозначим через W. Наша задача имеет цилиндрическую симметрию относительно вертикальной оси, проходящей через излучатель (ось z). Рассмотрим пучок лучей, образованный плоским пучком с угловым раствором $\Delta\chi_1$ при вращении всей лучевой картины относительно оси z. Охватываемый им телесный угол будет равен $2\pi \cos \chi_1 \Delta\chi_1$, а поток энергии в нем будет во столько раз меньше W, во сколько раз этот угол меньше 4π, и следовательно, будет равен $W \cos \chi_1 \Delta\chi_1 / 2$. Такой же поток энергии будет содержаться в аналогичном пучке лучей, выходящих вниз из излучателя под углами скольжения, близкими к χ_1, и в дальнейшем также заворачивающими на горизонтах z' и z''. Полный поток энергии, который несут оба пучка, равный $W \cos \chi_1 \Delta\chi_1$, каким-то определенным образом распределится по слою $z' \leqslant z \leqslant z''$. Обозначим обусловленную им силу звука на оси канала через ΔI_0, а на произвольном уровне z через ΔI. Очевидно, $\Delta I / \Delta I_0 = f / f_0$, где f и f_0 — факторы фокусировки лучей, попадающих при данном r на горизонты z и z_0.

В соответствии с работой [2] (см. § 38), для фактора фокусировки на больших расстояниях мы имеем (в наших обозначениях) выражение:

$$f(z, z_1, \chi_1, r) = r \cos \chi_1 \Big/ \sin \chi \frac{\partial r}{\partial \chi_1}, \tag{1}$$

где χ — угол скольжения луча на горизонте z. С другой стороны, мы имеем

$$r = ND + \varphi(z, z_1, \chi_1), \tag{2}$$

* В сокращенном изложении некоторые результаты см. в работе [1]. Необходимо учитывать, что некоторые принятые там обозначения отличаются от обозначений, использованных в настоящей работе.

где $D = D(z_1, \chi_1)$ — длина полного цикла луча, N — целое число, а $\varphi(z, z_1, \chi_1)$ — величина, не превышающая D.

При достаточно большом r, а значит и N, малой добавкой f можно пренебречь и положить $r = ND$. Далее, дифференцируя выражение (2), получаем

$$\frac{\partial r}{\partial \chi_1} = N\frac{\partial D}{\partial \chi_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \chi_1}.$$

По той же причине вторым членом в правой части последнего выражения можно пренебречь. Исключение представляет собой окрестность каустики. На самой каустике $\partial r / \partial \chi_1 = 0$, и следовательно, оба члена равны по абсолютной величине и обратны по знаку.

Таким образом, исключив из рассмотрения каустики и некие области около них, площадь которых неограниченно убывает при возрастании N, мы можем положить

$$f = D\cos\chi_1 \Big/ \sin\chi\frac{\partial D}{\partial \chi_1}. \tag{3}$$

Здесь D и $\partial D / \partial \chi_1$ не зависят от z. Угол выхода из излучателя для всех рассматриваемых лучей можно принять равным χ_1. Следовательно, в выражении для f от z зависит только $\sin\chi$ и поэтому

$$\Delta I = \Delta I_0\frac{f}{f_0} = \Delta I_0\frac{\sin\chi_0}{\sin\chi}, \tag{4}$$

где χ_0 и χ — углы скольжения рассматриваемых лучей соответственно на уровне оси канала и на произвольном горизонте z. Углы χ_0, χ_1 и χ связаны соотношением

$$\frac{\cos\chi_0}{c_0} = \frac{\cos\chi_1}{c_1} = \frac{\cos\chi}{c}, \tag{5}$$

где c_0 и c_1 — скорость звука соответственно на оси канала и горизонте излучения z_1.

Возьмем цилиндрическую поверхность радиуса r с вертикальной осью, проходящей через излучатель. Поток энергии через элемент этой поверхности, ограниченный плоскостями z и $z + dz$, равен, очевидно $2\pi r\Delta I\cos\chi dz$. Поток энергии через всю боковую поверхность цилиндра получится интегрированием этого выражения в пределах (z', z''). В соответствии с законом сохранения энергии этот поток должен быть равен энергии $W\cos\chi_1\Delta\chi_1$, вошедшей в рассматриваемые нами два элементарных пучка лучей, уменьшенный на фактор $e^{-\alpha r}$, вследствие поглощения звуковой энергии по пути. Таким образом, баланс энергии запишется следующим образом:

$$2\pi r\int_{z'}^{z''}\Delta I\cos\chi\, dz = W\cos\chi_1\Delta\chi_1 e^{-\alpha r}.$$

Подставив для ΔI выражение (4), получаем, поскольку ΔI_0 выносится за знак интеграла,

$$\Delta I_0 = \frac{W\cos\chi_1 e^{-\alpha r}\Delta\chi_1}{\pi r\sin\chi_0 D(\chi_0)}. \tag{6}$$

Здесь

$$D(\chi_0) = 2\int_{z'}^{z''}\frac{dz}{\operatorname{tg}\chi}. \tag{7}$$

Величина $D(\chi_0)$ равна длине цикла луча, пересекающего ось канала под углом χ_0. Она является важной характеристикой волновода и может быть определена, как только будет задан профиль скорости звука $c(z)$. Значение ΔI для произвольного z получится из формулы (6) путем еще одного использования соотношения (4). Для полной силы звука на горизонте z мы получаем выражение:

$$I(z, r) = \int_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \Delta I d\chi_1 = \int_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \Delta I_0 \frac{\sin\chi_0}{\sin\chi} d\chi_1 = \frac{W}{\pi r} \int_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \frac{\cos\chi_1 e^{-\alpha r}}{\sin\chi D(\chi_0)} d\chi_1 =$$

$$= \frac{W c_1}{\pi r c} \int_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \frac{e^{-\alpha r} d\chi_1}{\operatorname{tg}\chi D(\chi_0)}. \qquad (8)$$

Здесь при интегрировании χ_0 предполагается выраженным через χ_1 при помощи соотношения (5). Угол $\chi_{1\max}$ является максимальным углом скольжения, при котором луч, выходя из излучателя, в дальнейшем остается в пределах волновода.

Для определения нижнего предела интегрирования $\chi_{1\min}$ необходимо рассмотреть два случая:

а) $c_1 < c$ — скорость на уровне излучения меньше, чем на уровне приема. В этом случае лучи, вышедшие из излучателя под нулевым или малым углом скольжения, завернут на горизонтах более близких к оси волновода, чем приемник и, следовательно, не попадут в него. Минимальное значение угла χ_1, при котором луч еще достигает горизонта z, найдется из соотношения (5), в котором надо положить $\chi_1 = \chi_{1\min}$, $\chi = 0$. В результате

$$\cos\chi_{1\,\min} = \frac{c_1}{c(z)}. \qquad (9)$$

Мы будем предполагать, что коэффициент α в формуле (8) не зависит от угла χ_1; тогда экспоненциальный множитель может быть вынесен за знак интеграла *. Полезно ввести обозначение:

$$\frac{1}{r_0} = 4 \int_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \frac{d\chi_1}{\operatorname{tg}\chi D(\chi_0)}. \qquad (10)$$

Тогда

$$I(z, r) = \frac{W c_1}{4\pi r_0 r c} e^{-\alpha r}. \qquad (11)$$

Силу звука при произвольном r можно получить, предполагая, что до расстояния r_0 распространение происходит по сферическому, а затем по цилиндрическому законам. Что это так, будет видно, если записать выражение (11) в виде

$$I = \frac{W}{4\pi r_0^2} \frac{r_0}{r} \frac{c_1}{c} e^{-\alpha r}.$$

Здесь первый множитель дает силу звука на расстоянии r_0 при сферическом распространении, второй множитель дает убывание при цилиндрическом расхождении волны при $r > r_0$, а множитель c_1 / c весьма близок к единице.

---

* Это предположение выполняется далеко не всегда. В частности, оно не выполняется при распространении в приповерхностном канале, когда затухание в основном обусловлено рассеянием на неровной поверхности воды.

Хотя величина r_0 весьма полезна в расчетном отношении, не следует думать, что на расстоянии r_0 фактически формируется цилиндрический закон распространения. Полезно также отметить, что r_0 зависит от z и z_1.

Формула (8) допускает простое обобщение на случай излучателя, направленность которого характеризуется некоторой функцией $\Phi(\chi_1, \varphi)$. Тогда

$$I(z, r, \varphi) = \frac{Wc_1}{\pi rc} \int\limits_{\chi_{1\,\min}}^{\chi_{1\,\max}} \frac{\Phi(\chi_1, \varphi) e^{-\alpha r} d\chi_1}{\operatorname{tg} \chi D(\chi_0)}. \tag{12}$$

При этом предполагается, что

$$\int\limits_{0-\pi/2}^{2\pi+\pi/2} \int \Phi(\chi_1, \varphi) \cos \chi \, d\varphi d\chi_1 = 4\pi,$$

а W, как и раньше, полная акустическая мощность излучателя.

Выражению (10) можно придать вид, симметричный относительно излучателя и приемника. Заменяя в нем переменную интегрирования χ_1 на χ_0 с помощью соотношения (5), получаем

$$\frac{1}{r_0} = \frac{2c_1c}{c_0^2} \int\limits_{\chi_{0\,\min}}^{\chi_{0\,\max}} \frac{\sin^2 \chi_0 d\chi_0}{\sin \chi_1 \sin \chi D(\chi_0)}. \tag{13}$$

Последнее выражение не изменяется при замене $\chi_1 \rightleftarrows \chi$, $c_1 \rightleftarrows c$.

Верхний предел интегрирования $\chi_{0\,\max}$ является максимальным углом скольжения луча на уровне оси волновода, при котором луч еще удерживается волноводом. Нижний предел $\chi_{0\,\min}$ является минимальным углом скольжения луча, при котором луч попадает как на горизонт излучения, так и на горизонт приема. В силу симметрии формулы (13) относительно излучателя и приемника, можно без ограничения общности предполагать, что излучатель удален от оси канала больше, чем приемник, то есть $c_1 > c$. Тогда из соотношения (5) получаем

$$\cos \chi_{0\,\min} = c_0 / c_1. \tag{14}$$

Исследуем теперь несколько подробнее интеграл (7). Допустим для общности, что в районе оси канала $z = z_0$ имеется слой толщины $2H$, скорость звука в котором постоянна. В этом слое $\chi = \chi_0$, и интегрирование в его пределах дает $2H / \operatorname{tg} \chi_0$. Нам остается вычислить интегралы от z' до $z_0 - H$ и от $z_0 + H$ до z''. Используя соотношение (5), находим

$$\frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = -c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi.$$

Заменив теперь интегрирование по z в пределах $(z_0 + H, z'')$ интегрированием по χ в пределах соответственно $(0, \chi_0)$, получим

$$\int\limits_{z_0+H}^{z''} \frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = \int\limits_0^{\chi_0} c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi.$$

Ниже оси канала, считая ось z, направленной вверх, имеем $dc / dz < 0$ и совершенно аналогично

$$\int\limits_{z'}^{z_0-H} \frac{dz}{\operatorname{tg} \chi} = -\int\limits_0^{\chi_0} c \left(\frac{dc}{dz} \right)^{-1} d\chi = \int\limits_0^{\chi_0} c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} d\chi,$$

где $|dc / dz|$ означает абсолютное значение градиента. Учитывая все вышеизложенное, получаем окончательно:

$$D(\chi_0) = \frac{4H}{\operatorname{tg} \chi_0} + 2 \int\limits_0^{\chi_0} \left[\left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_1 + \left(c \left| \frac{dc}{dz} \right|^{-1} \right)_2 \right] d\chi. \tag{15}$$

Здесь при вычислении интеграла каждому χ сопоставляются два значения z при помощи соотношения $c(z) = (c_0 / \cos\chi_0)\cos\chi$, из которых одно расположено в области $(z_0 + H, z'')$, а другое в области $(z', z_0 - H)$. Значения $c\,|dc / dz|^{-1}$ при том и другом z отмечены индексами 1 и 2.

В заключение отметим, что формулу (13) и другие можно получить из волновых представлений методом суммирования интенсивностей нормальных волн. Поле отдельной нормальной волны при этом вычисляется в приближении ВКБ.

Канал простейшего вида. Рассмотрим сначала простейший звуковой канал, в котором скорость звука дается формулами:

$$\left.\begin{array}{ll} c = c_0 & -H \leqslant z \leqslant H, \\ c = c_0[1 + a_2(z - H)] & z \geqslant H, \\ c = c_0[1 - a_1(z + H)] & z \leqslant -H. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

В этом случае, учитывая также формулу (5),

$$z < -H, \ \left|\frac{dc}{dz}\right| = c_0 a_1, \ \left(c\left|\frac{dc}{dz}\right|^{-1}\right)_1 = \frac{\cos\chi}{a_1\cos\chi_0},$$

$$z > H, \ \left|\frac{dc}{dz}\right| = c_0 a_2, \ \left(c\left|\frac{dc}{dz}\right|^{-1}\right)_2 = \frac{\cos\chi}{a_2\cos\chi_0}$$

и формула (15) приводится к следующему виду:

$$D(\chi_0) = 4H / \operatorname{tg}\chi_0 + 4\operatorname{tg}\chi_0 / g, \quad \text{где } 2 / g \equiv (1 / a_1) + (1 / a_2). \qquad (17)$$

Воспользуемся формулой (10), предположив, что $c_1 > c$. При этом $\chi_{1\,\min} = 0$, $\chi_{1\,\max} = \pi / 2$. В результате

$$\frac{1}{r_0} = g\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}\chi_0}{\operatorname{tg}\chi}\,\frac{d\chi_1}{p + \operatorname{tg}^2\chi_0} \qquad p \equiv gH. \qquad (18)$$

Здесь χ_0 и χ должны быть выражены через χ_1 с помощью соотношения (5). В частности,

$$p + \operatorname{tg}^2\chi_0 = \frac{1}{\cos^2\chi_1}\left[\frac{c_1^2}{c_0^2} - (1 - p)\cos^2\chi_1\right]. \qquad (19)$$

Предположим, что приемник расположен в однородном слое $-H < z < H$. Тогда, $\chi = \chi_0$, и мы получим из формулы (18)

$$\frac{1}{r_0} = g\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\chi_1 d\chi_1}{(c_1^2/c_0^2) - (1 - p)\cos^2\chi_1} = \frac{1}{p - 1}\int_0^{\pi/2} d\chi_1 +$$

$$+ \frac{c_1^2}{c_0^2(1 - p)}\int_0^{\pi/2} \frac{d\chi_1}{(c_1^2/c_0^2) - (1 - p)\cos^2\chi_1}$$

или, воспользовавшись таблицами интегралов [3],

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\pi g}{2(1 - p)}\left[\frac{c_1}{c_0\sqrt{(c_1^2/c_0^2) + p - 1}} - 1\right].$$

Положим для определенности, что излучатель расположен снизу от однородного слоя на расстоянии $d = |z + H|$ от его нижней границы. Тогда $c_1 / c_0 = 1 + a_1 d$. Предположим далее, что $a_1 d \ll 1$, $p = gH \ll 1$. Тогда последняя формула запишется проще:

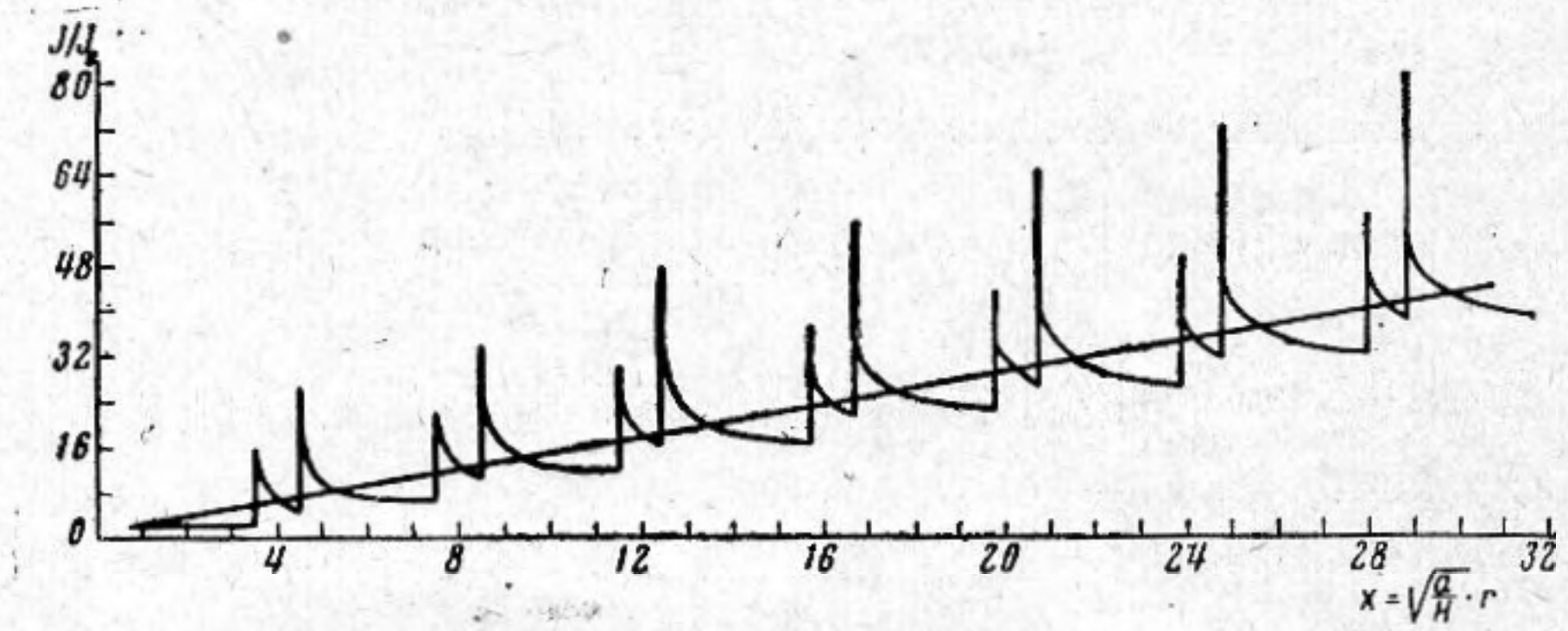
$$r_0 = (2 / \pi g)\sqrt{2gd + p}. \qquad (20)$$

Чтобы получить r_0 для излучателя, расположенного в однородном слое, в последней формуле достаточно положить $d = 0$. Тогда

$$r_0 = (2 / \pi)\sqrt{H / g}. \tag{21}$$

Наконец, если канал симметричен, то $g = a_1 = a_2 = a$.

На фиг. 2 кривая с пиками представляет собой силу звука I, вычисленную для случая симметричного канала путем довольно громоздкого непосредственного суммирования энергий отдельных лучей с учетом их фактора фокусировки, и отнесенную к силе звука $I_0 = W / 4\pi r^2$ в однородном пространстве. По оси абсцисс откладывается безразмерное расстояние $x = r\sqrt{a / H}$. Излучатель предполагается расположенным на оси канала,



Фиг. 2

приемник в однородном слое, при $z = H / 2$. Отдельные пики соответствуют каустикам. Высоты этих пиков получены для определенной частоты. Поглощение звука не учитывается.

Сплошная наклонная линия получена с помощью формулы (11) и выражения (21) для r_0. Мы видим, что она очень неплохо передает средний ход интенсивности.

В безразмерных координатах $x = r\sqrt{a / H}$ переходное расстояние r_0 соответствует величине $x_0 = 2 / \pi$. Полезно отметить, что оно оказывается почти в 6 раз меньше, чем расстояние до первой каустики или до первого возвращения в однородный слой лучей, заворачивающих в верхнем или нижнем неоднородных полупространствах.

Обратимся теперь к случаю произвольного расположения излучателя и приемника в рассматриваемом нами простейшем канале. Обозначим $\varkappa_1 = (c_1 - c_0) / c_0$, $\varkappa = (c - c_0) / c_0$. Предполагая с самого начала величины $\varkappa_1$, $\varkappa$, p, χ_0, χ и χ_1 малыми, из формулы (5) получим приближенно

$$\operatorname{tg}\chi_0 \approx \chi_0 \approx \sqrt{\chi_1^2 + 2\varkappa_1}, \qquad \operatorname{tg}\chi \approx \chi \approx \sqrt{\chi_1^2 + 2(\varkappa_1 - \varkappa)}.$$

В формуле (18) введем вместо χ_1 новую переменную интегрирования $\xi = \chi_1 / \sqrt{2\varkappa_1}$. Для нее нижний предел интегрирования будет также $\xi = 0$, а что касается верхнего, то поскольку $\sqrt{2\varkappa_1}$ мало, его можно считать бесконечностью. Теперь формула (18) может быть написана в следующем виде:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{g}{\sqrt{2\varkappa_1}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + \xi^2}\, d\xi}{\sqrt{[1 - (\varkappa/\varkappa_1)] + \xi^2}\,[1 + (p/2\varkappa_1) + \xi^2]}. \tag{22}$$

Полученный интеграл сводится к эллиптическому. Заметим, что интеграл расходится, если $\varkappa = \varkappa_1$, т. е., когда излучатель и приемник расположены на горизонтах с равной скоростью звука. Это дает $r_0 = 0$ и бесконечную силу звука, что естественно, так как это означает расположение приемника на каустике.

Вычислим характеристическое расстояние r_0 для случая приповерхностного канала в предположении, что поверхность воды плоская, а градиент скорости звука постоянен по глубине. Если в выведенных выше формулах положить $p = 0$, $a_1 = a_2 = g = a$, то мы получим случай симметричного канала с осью $z = 0$. Если предположить далее, что излучатель и приемник находятся по одну сторону от оси (скажем, ниже ее), то получающийся случай будет эквивалентен случаю приповерхностного канала с той только разницей, что в приповерхностном канале звуковая энергия удваивается по сравнению с симметричным каналом. Здесь обе половины канала как бы совмещаются в одну. Силу звука, по-прежнему, можно вычислять по формуле (11), но только r_0 нужно считать в два раза меньшим, чем это следует из формулы (22).

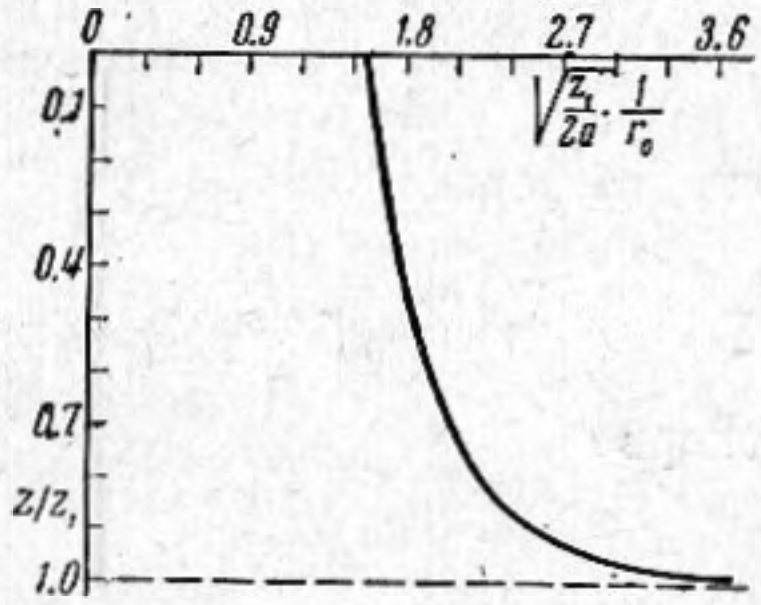
Обозначим

$$k = \sqrt{\varkappa / \varkappa_1} = \sqrt{z / z_1}. \qquad (23)$$

Тогда для приповерхностного канала получаем

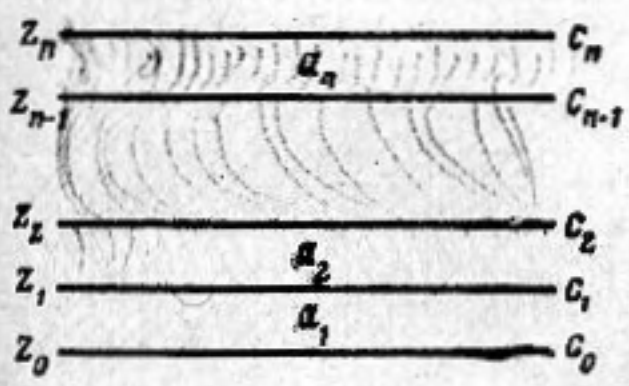
$$\frac{1}{r_0} = \sqrt{\frac{2a}{z_1}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-k^2+\xi^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{z_1}} K(k), \qquad (24)$$



Фиг. 3

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода аргумента k [4]. На фиг. 3 изображена зависимость величины $\sqrt{(z_1 / 2a)}\,(1 / r_0)$ от отношения z / z_1. Напомним, что здесь предполагается, что $z < z_1$. Если имеет место обратный случай, то нужно поменять местами точки излучения и приема. Обращение r_0 в нуль при $z / z_1 = 1$, как уже указывалось выше, означает попадание приемника на каустику.



Фиг. 4

Линейно-кусочная аппроксимация профиля скорости звука. Расчетные формулы для характеристического расстояния r_0 в случае произвольной слоистой среды мы получим в предположении, что среда может быть разбита на совокупность слоев, в каждом из которых градиент скорости звука постоянен. Воспользуемся снова формулой (10) и прежде всего вычислим функцию $D(\chi_0)$, определяемую интегралом (7). В последнем интервал интегрирования можно разбить на два: от z' до z_0 и от z_0 до z'', где z_0 — уровень минимума скорости звука (оси канала). Соответственно, функция $D(\chi_0)$ представляется в виде суммы $D(\chi_0) = D_1(\chi_0) + D_2(\chi_0)$. Оба интеграла будут вычисляться совершенно одинаково, и мы вычислим второй из них.

Всю среду выше оси канала разобьем на n слоев, границы которых обозначим $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ (фиг. 4), причем z_n совпадает с верхней границей звукового канала. Обозначим скорость звука на этих границах соответственно через $c_0, c_1, \ldots, c_n$, а через $a_i = (1 / c_0)(dc / dz)$ — относительный градиент скорости звука в каждом из слоев $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зададим для χ_0 n значений χ_{i0}, определяемых из соотношения

$$\cos \chi_{i0} = \frac{c_0}{c_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n. \qquad (25)$$

Для этих значений угла χ_0 мы и вычислим функцию $D_2(\chi_0)$. Нетрудно видеть, что луч, пересекающий ось канала под углом χ_{i0}, заворачивает на горизонте z_i. При этом все промежуточные горизонты z_k, $k = 1 : 2, \ldots, i - 1$

он пересекает под углами χ_{ik}, определяемыми из соотношения:

$$\frac{\cos\chi_{ik}}{c_k} = \frac{\cos\chi_{i0}}{c_0}, \qquad \chi_{ii} = 0. \tag{26}$$

Теперь

$$D_2(\chi_{i0}) = 2\int_0^{z_i} \frac{dz}{\operatorname{tg}\chi} = 2\sum_{k=1}^{i}\int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{dz}{\operatorname{tg}\chi}, \tag{27}$$

но внутри слоя номера k, χ связано с z соотношением

$$\cos\chi = \frac{\cos\chi_{i0}}{c_0}\, c(z),$$

или, дифференцируя

$$-\sin\chi d\chi = \frac{\cos\chi_{i0}}{c_0}\, dz = \cos\chi_{i0}\, a_k\, dz.$$

Теперь

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{dz}{\operatorname{tg}\chi} = \frac{1}{a_k\cos\chi_{i0}} \int_{\chi_{ik}}^{\chi_{i,\,k-1}} \cos\chi\, d\chi = \frac{\sin\chi_{i,\,k-1} - \sin\chi_{ik}}{a_k\cos\chi_{i0}}$$

Подставляя это в формулу (27) и учитывая, что $\chi_{ii} = 0$, получаем

$$D_2(\chi_{i0}) = \frac{2}{\cos\chi_{i0}}\left[\frac{\sin\chi_{i0} - \sin\chi_{i1}}{a_1} + \frac{\sin\chi_{i1} - \sin\chi_{i2}}{a_2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin\chi_{i,\,i-2} - \sin\chi_{i,\,i-1}}{a_{i-1}} + \frac{\sin\chi_{i,\,i-1}}{a_i}\right].$$

Разбиение нижней половины звукового канала целесообразно производить на то же число слоев и так, чтобы значения скоростей звука на их границах были такими же, что и в верхней половине. Тогда при вычислении D_1 мы получим тот же набор углов скольжения χ_{ik}, другими будут лишь градиенты в слоях. Величины, соответствующие a_1, a_2, ... в нижней части канала, мы обозначим через b_1, b_2, ... Кроме того, мы предположим, для общности, что в районе оси канала имеется однородный слой толщины $2H$, что дает в выражении для $D(\chi_0)$ добавочно величину $4H / \operatorname{tg}\chi_0$. В результате получаем

$$D(\chi_{i0}) = \frac{4H}{\operatorname{tg}\chi_0} + \frac{2}{\cos\chi_{i0}}\left[\frac{1}{g_1}(\sin\chi_{i0} - \sin\chi_{i1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{g_2}(\sin\chi_{i1} + \sin\chi_{i2}) + \ldots + \frac{1}{g_{i-1}}(\sin\chi_{i,\,i-2} - \sin\chi_{i,\,i-1}) + \frac{1}{g_i}\sin\chi_{i,\,i-1}\right], \tag{28}$$

где

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}. \tag{29}$$

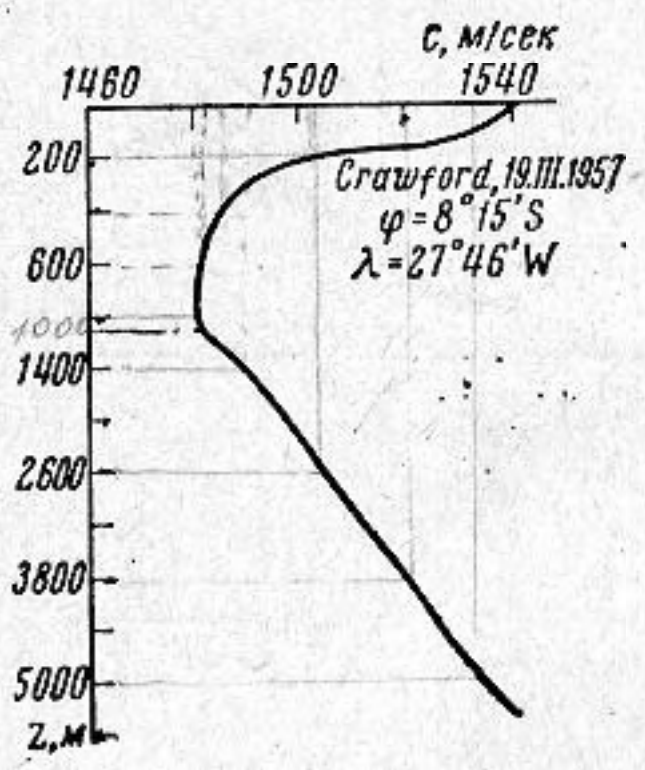
Полученные таким образом значения в точках $\chi_0 = \chi_{20}, \ldots, \chi_{n0}$ при достаточно большом n позволят в случае необходимости аппроксимировать $D(\chi_0)$ в виде достаточно гладкой функции.

Для вычисления r_0 воспользуемся формулой (10). При этом предположим, что излучатель расположен на горизонте $z = z_l$, а приемник на горизонте $z = z_m$. Без ограничения общности можно полагать, что $l > m$. При достаточно большом n интеграл (10) можно с любой заданной точностью заменить суммой, причем переменные χ_1, χ и χ_0 будут пробегать соответ-

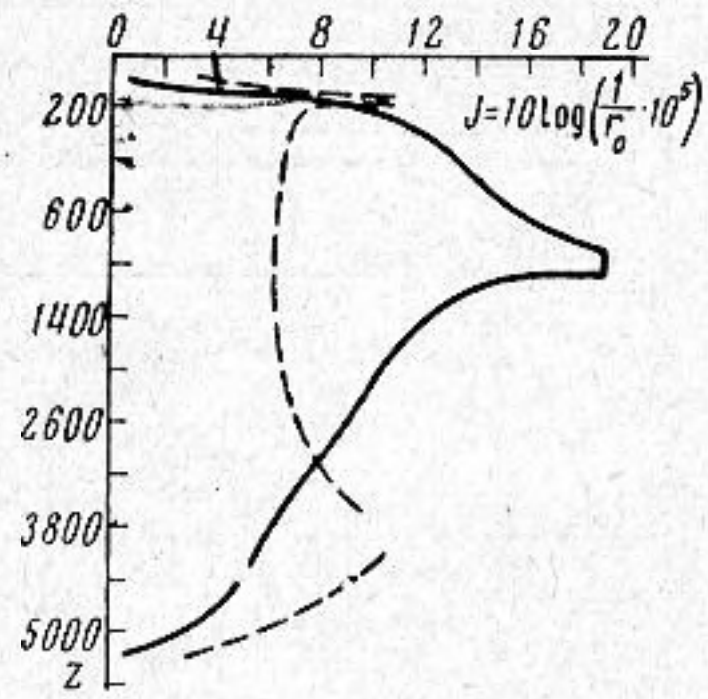
ственно значения χ_{il}, χ_{im} и χ_{i0}, где $i = l, l+1, \ldots, n$. В результате мы получаем

$$\frac{1}{r_0} = 4 \sum_{i=l}^{n-1} \frac{\chi_{i+1,\,l} - \chi_{il}}{\operatorname{tg} \chi_{im} D(\chi_{i0})}. \tag{30}$$

Последняя формула требует дополнительных пояснений лишь при $l = m = 0$, т. е., когда излучатель и приемник находятся в пределах одно-



Фиг. 5



Фиг. 6

родного слоя или на его границе. Здесь хотя $\chi_{00} = 0$, но $\operatorname{tg} \chi_{00} D(\chi_{00}) = 4H$. В результате, выделяя в формуле (30) член $l = 0$, получаем

$$l = m = 0, \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{H} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\chi_{i+1,\,0} - \chi_{i0}}{\operatorname{tg} \chi_{i0} D(\chi_{i0})}. \tag{31}$$

Для иллюстрации приведем результаты расчетов r_0 для профиля скорости звука, изображенного на фиг. 5. На этой фигуре масштаб глубин до 800 *м* отличается в 3 раза от масштаба на больших глубинах. При расчете вся толща океана была разбита на 25 слоев. Из них слой 740—890 *м* предполагался изоскоростным. На фиг. 6 по оси абсцисс отложена величина $J = 10 \lg (1 / r_0) \cdot 10^5)$, где r_0 выражено в метрах. Сплошная кривая относится к случаю, когда излучатель расположен в пределах однородного слоя. Если приемник расположен в этом же слое, то $r_0 = 6{,}45 \cdot 10^3$ *м*, $J = 19$. При выходе приемника из однородного слоя r_0 резко возрастает, а J падает. При переходе к глубинам $z = 100$ *м* выше оси канала или $z = 5200$ *м* ниже оси канала, значение J падает до 2, а r_0 возрастает до $r_0 = 6{,}31 \cdot 10^4$ *м*. Соответственно этому и сила звука на оси канала и на горизонте $z = 100$ *м* или $z = 5200$ *м* будет разниться на 17 *дб*.

Пунктирная кривая относится к случаю, когда излучатель расположен на глубине 80 *м*. Максимальная сила звука имеет место вблизи этого горизонта, а также горизонта 3800 *м*, где имеет место та же скорость звука. На самих этих горизонтах величина J стремится в лучевом приближении к бесконечности. Эта же кривая относится к случаю, когда излучатель расположен на горизонте 3800 *м*.

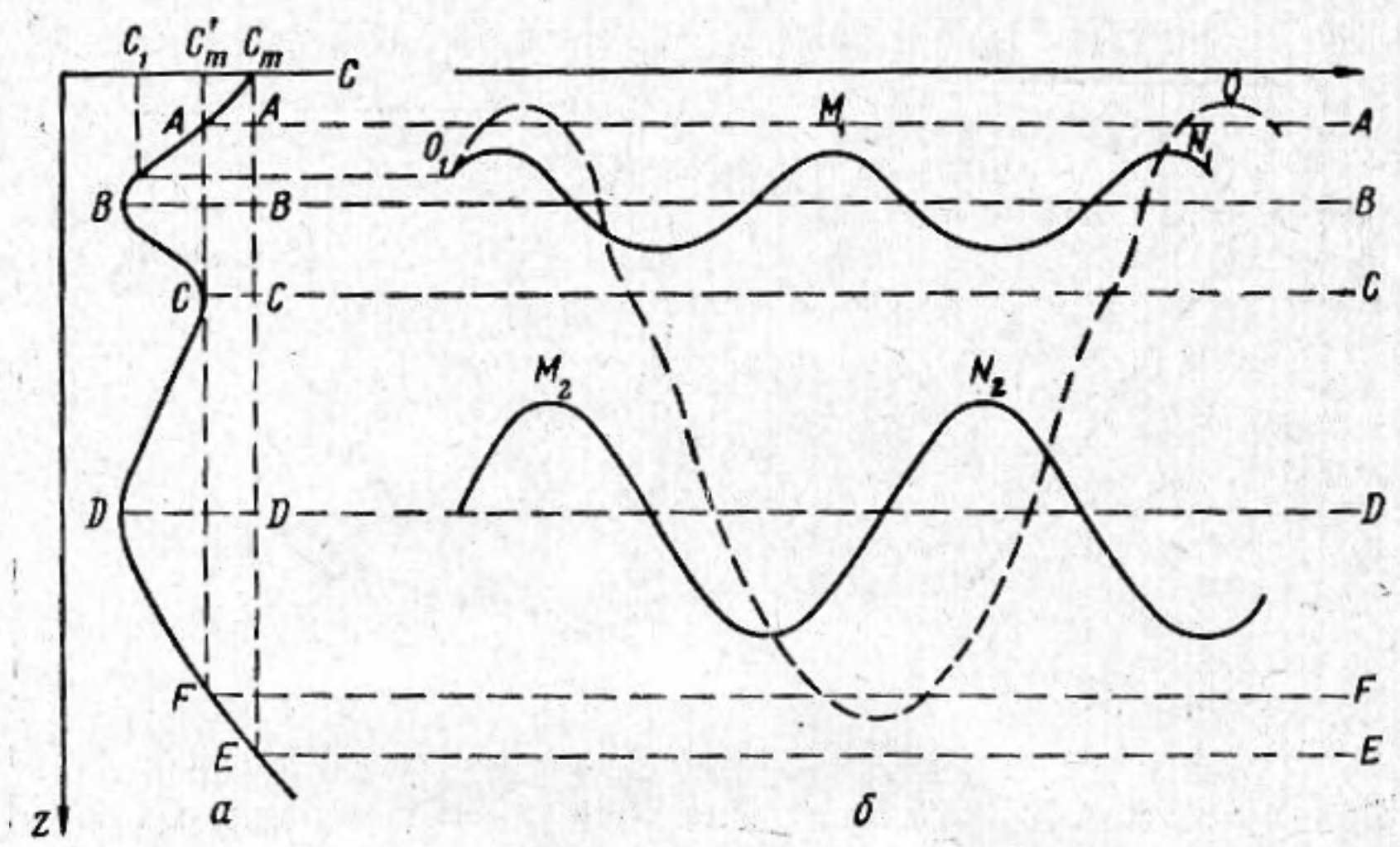
Усредненное поле в двухканальной системе. Пусть профиль скорости звука $c(z)$ имеет вид, изображенный на фиг. 7, *а*. Ниже будем пользоваться следующей терминологией: горизонт BB — ось первого канала; горизонт DD — ось второго канала; CC — горизонт раздела первого и второго каналов; область, заключенная между горизонтами AA и CC — зона первого канала; область, заключенная между горизонтами CC и FF — зона второго канала; область, заключенная между поверхностью воды и

EE — зона общего канала. Последняя на рис. 7, *а* включает в себя две пер вых зоны.

Таким образом, луч $O_1M_1N_1$ (фиг. 7, *б*) — есть луч первого канала; лу $O_2M_2N_2$ — луч второго канала; луч O_1PQ — луч общего канала.

Кроме того, введем обозначения: c_m — скорость звука на границах об щего канала, c_m' — скорость звука на горизонте раздела первого и второг каналов.

Не трудно видеть, что если $c_m < c_m'$, то общего канала не существует так как лучей типа O_1PQ не существует. В этом случае распространение



Фиг. 7

в первом и втором каналах происходит независимо, и к каждому из них по отдельности приложима изложенная в предыдущих параграфах теория. Поэтому ниже мы будем предполагать, что $c_m' < c_m$, как на фиг. 7, *а*.

Предположим, что излучатель расположен в первом канале. Тогда поле в каждой точке первого канала будет состоять из двух частей. Одна из них обусловлена лучами первого канала, другая — лучами общего канала. Если же приемник будет вне первого канала, но в пределах общего канала, то поле в первом канале будет обусловливаться только лучами общего канала. Аналогичным будет положение при излучателе, расположенном во втором канале. Наконец, если излучатель будет расположен в зоне общего канала, но вне зон как первого, так и второго каналов, то при любом расположении приемника поле будет обусловливаться только лучами общего канала. Таким образом, для того, чтобы знать усредненное поле при любых положениях излучателя и приемника в пределах общего канала, необходимо дополнительно к изложенному в предыдущих параграфах знать усредненное поле общего канала, так как поля первого и второго каналов вычисляются по выведенным ранее формулам одноканальной системы.

Пусть снова скорость звука и угол скольжения луча на горизонте излучателя будет c_1 и χ_1. Для лучей общего канала имеем, очевидно

$$\left.\begin{aligned} &\chi_{1\,\min} \leqslant \chi_1 \leqslant \chi_{1\,\max}, \\ \text{где}\quad &\chi_{1\,\min} = \arccos\frac{c_1}{c_m'}, \qquad \chi_{1\,\max} = \arccos\frac{c_1}{c_m}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

При $\chi_1 < \chi_{1\,\min}$ луч целиком лежит в пределах того канала, в котором находится излучатель; при $\chi_1 > \chi_{\max}$ луч не удерживается даже общим каналом.

Для вычисления поля общего канала (вернее, соответствующего ему характеристического расстояния) может быть снова применена формула (10). В ней под χ_0 целесообразно понимать угол скольжения луча на горизонте раздела первого и второго каналов так, что

$$\cos\chi_0 = \frac{c_m'}{c_1}\cos\chi_1, \tag{33}$$

функция $D(\chi_0)$, представляющая собой длину соответственного цикла луча, будет снова вычисляться по формуле (7), где z' и z'' — горизонты заворота луча, лежащие в зоне общего канала, но вне зон первого и второго каналов. Угол χ в (7) будет связан с χ_0 формулой, аналогичной формуле (33), в которой надо заменить $\chi_1 \to \chi$, $c_1 \to c(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Об одном предельном законе распространения волн в природных волноводах. Акуст. ж., 1964, 10, 114—116.
2. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
3. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
4. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Раппопорт. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, Изд-во АН СССР, 1962.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
9 июля 1964 г.