АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XI 1965 Вып. 3

УДК 534.213.4

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВОЛНОВОДОВ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

В. А. Кашин, В. В. Меркулов

При помощи приближенных методов отображения близких областей вычислены поправки к собственным числам уравнения Гельмгольца для возмущенных областей, близких к кругу или тонкому кольцу.

Как указано в работе [1], для приближенного решения уравнения Гельмгольца иногда бывает удобно применять метод конформных преобразований; при этом основная трудность приближенного решения задачи сводится к нахождению соответствующего конформного преобразования области со сложной границей. В работе [2] указан ряд приближенных формул для преобразования канонических областей на возмущенные области, близкие к первым. Ниже с помощью преобразования круга на область, близкую к кругу, находятся поправки к собственным числам уравнения Гельмгольца для области, близкой к кругу или тонкому кольцу.

Пусть имеется регулярный цилиндрический акустический волновод, в котором распространение энергии происходит вдоль оси z. Рассмотрим случай, когда потенциал Π поля скоростей звуковых колебаний удовлетворяет внутри волновода уравнению $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$ (k — волновое число) с граничным условием $\partial\Pi / \partial n|_\Sigma = 0$, где дифференцирование производится по нормали к поверхности волновода Σ. Если искать решение уравнения для Π в виде $\Pi = \psi_i(x, y) Z_i(z)$, где индекс i применен для нумерации возможных частных решений, то после разделения переменных для функции $\psi_i(x, y)$, описывающей потенциал поля скоростей в поперечном волноводном сечении S с контуром L, получается уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2} + \varkappa_i^2\psi_i = 0 \tag{1}$$

с граничным условием $\left.\dfrac{\partial\psi_i}{\partial n}\right|_L = 0$, где $\varkappa_i^2$ — собственное значение.

Предположим, что невозмущенная форма поперечного сечения волновода — круг, радиус которого без нарушения общности положим равным единице, а возмущенная описывается в полярных координатах уравнением

$$r = 1 - \delta(\varphi), \tag{2}$$

где φ — азимутальный угол, а функция $\delta(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Здесь ε некоторая положительная малая по сравнению с единицей величина. Условия (3) физически означают, что контур L достаточно мало и плавно отклоняется от единичного круга и не имеет изломов.

Считаем известным конформное преобразование

$$w = x + iy = F(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{4}$$

переводящее единичный круг на область с границей (2). Перейдя в уравнении (1) к новым переменным ξ, η, согласно формуле (4) получим уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial n^2}+\varkappa_i^2|F'(\zeta)|^2\psi_i=0 \tag{5}$$

с граничным условием $\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\Big|_{L_0}=0$, где L_0 — окружность единичного радиуса.

Как показано в работе [2], при выполнении условий (3) преобразование $F(\zeta)$ имеет в первом приближении вид:

$$F(\zeta)\approx\zeta\left\{1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}d\varphi\right\}. \tag{6}$$

В том же приближении $|F'(\zeta)|^2\approx 1+2\,\mathrm{Re}\,\{f'(\zeta)\}$, где $f'(\zeta)$ малая величина порядка ε:

$$f'(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}\left\{-\frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}d\varphi\right\}.$$

На этом основании мы получаем вместо уравнения (5) в первом приближении уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\eta^2}+\varkappa_i^2\psi_i=-2\varkappa_i^2\,\mathrm{Re}\,\{f'(\zeta)\}\,\psi_i. \tag{7}$$

В дальнейшем будем следовать теории возмущений. Уравнению (7) соответствует невозмущенное уравнение

$$\frac{\partial^2\psi_{i,0}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi_{i,0}}{\partial\eta^2}+\varkappa_{i,0}^2\psi_{i,0}=0, \tag{8}$$

где под индексом i следует понимать два индекса mn. Собственные функции уравнения (8) имеют вид:

$$\psi_{i,0}=\psi_{mn,0}^{(1,2)}=C_{mn}J_m(\mu_{mn}\rho)\begin{cases}\cos m\Theta\\ \sin m\Theta\end{cases}. \tag{9}$$

Здесь индексы 1, 2 относятся к двум линейно независимым собственным функциям, соответствующим $\varkappa_{mn,0}^2$, ρ и Θ — полярные координаты на ζ-плоскости, $J_m(\mu_{mn}\rho)$ — функция Бесселя 1-го рода m-го порядка, μ_{mn} — корни уравнения $\frac{d}{d\rho}\{J_m(\mu_{mn}\rho)\}|_{\rho=1}=0$, C_{mn} — коэффициенты, обеспечивающие нормировку

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\psi_{mn,0}^2\,\rho d\rho\,d\Theta=1.$$

Собственные значения $\varkappa_{mn,0}^2$ для круглого волновода вырождены, за исключением $\varkappa_{0n,0}^2$. Возмущенные собственные значения в первом приближении можно искать в виде

$$\varkappa_i^2=\varkappa_{i,0}^2+\varkappa_{i,1}^2,$$

где $\varkappa_{i,1}^2$ имеет величину порядка ε. Как следует из теории, развитой в работе [3], в случае двухкратного вырождения $\varkappa_{i,0}^2$ поправки $\varkappa_{i,1}^2$ находятся из решения уравнения

$$\begin{vmatrix} d_{i11}-\varkappa_{i,1} & d_{i21}\\ d_{i12} & d_{i22}-\varkappa_{i,1}\end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

где

$$d_{ipq} = -2\varkappa_{i,0}^2 \int \mathrm{Re}\,\{f'(\zeta)\}\,\psi_{i,0}^{(p)}\psi_{i,0}^{(q)}\,dS_\zeta, \tag{11}$$

и интегрирование проводится по единичному кругу на ζ-плоскости (dS_ζ — элемент площади этого круга). Уравнение (10) имеет корни

$$\varkappa_{i,1}^2 = \frac{1}{2}\{d_{i11} + d_{i22} \pm \sqrt{(d_{i11} - d_{i22})^2 + 4d_{i21}d_{i12}}\}. \tag{12}$$

Для невырожденного собственного значения $\varkappa_{0n,0}^2$ мы имеем, согласно той же теории, поправку

$$\varkappa_{0n,1}^2 = -2\varkappa_{0n,0}^2 \int \mathrm{Re}\,\{f'(\zeta)\}\,\psi_{0n,0}^2\,dS_\zeta. \tag{13}$$

Предположим, что $\delta(\varphi)$ задается в виде ряда Фурье:

$$\delta(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Без нарушения общности полагаем $A_0 = 0$. Как показано в работе [2], выражение (6) допускает представление в виде ряда:

$$F(\zeta) = \zeta - \sum_{k=1}^{\infty}(A_k - iB_k)\zeta^{k+1},$$

откуда следует

$$\mathrm{Re}\{f'(\zeta)\} = -\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\rho^k(A_k \cos k\Theta + B_k \sin k\Theta). \tag{14}$$

Из формул (12) и (13) с учетом выражений (9) и (14) мы получаем в первом приближении поправку для двухкратно вырожденных собственных значений

$$\varkappa_{mn,1}^2 = \pm\varkappa_{mn,0}^2\sqrt{A_{2m}^2 + B_{2m}^2}\,\pi(2m+1)C_{mn}^2\int_0^1 \rho^{2m+1}[J_m(\mu_{mn}\rho)]^2\,d\rho \tag{15}$$

и поправку для невырожденного собственного значения — $\varkappa_{0n,1}^2 = 0$.

Преобразование (6) может быть использовано также для нахождения в первом приближении собственных значений уравнения (1) для области, близкой к тонкому кольцу, которая в полярных координатах W-плоскости задается неравенством

$$1 - \delta(\varphi) - d < r(\varphi) < 1 - \delta(\varphi), \tag{16}$$

где $\delta(\varphi)$ удовлетворяет условиям (3), а положительная величина d сравнима по порядку с ε.

Так как функция (6) в первом приближении переводит единичный круг в область (2), то она в том же приближении переводит кольцо

$$1 - d < \rho(\Theta) < 1$$

в область (16). Это является следствием того, что $d \sim \varepsilon$. Следует учесть, что изменение толщины кольца d на величину ε^2 в первом приближении не влияет на изменение собственных значений $\varkappa_{i,0}^2$ с порядковыми номерами $i = \{m1\}$, где $m = 1, 2, 3 \ldots$, но, вызывает изменения собственных значений на величину $\sim\varepsilon$ для всех остальных порядковых номеров, т. к. эти значения примерно обратно пропорциональны d. Однако функция (6)

сама уже дает погрешность в отображении областей порядка ε^2. Поэтому разумно искать поправки в первом приближении к собственным значениям только для волн типа $m1$.

Пользуясь выкладками, аналогичными проведенным для круговой области, получим следующее выражение для поправок:

$$\overset{2}{\varkappa}_{m1,1} = \pm \overset{2}{\varkappa}_{m1,0} \sqrt{A_{2m}^2 + B_{2m}^2}\, C_{m1}^2 \pi (2m+1) \int\limits_{1-d}^{1} \rho^{2m+1} \{Z_m(\mu_{mn}\rho)\}^2 d\rho, \quad (17)$$

где через $Z_m(\mu_{mn}\rho)$ обозначена радиальная функция для кольца. Пусть номер m таков, что можно с хорошей точностью положить $(1-d)^{2m+1} \approx 1$. Тогда формула (17) приводится к простому виду:

$$\overset{2}{\varkappa}_{m1,1} = \pm \overset{2}{\varkappa}_{m1,0} (2m+1) \sqrt{A_{2m}^2 + B_{2m}^2}. \quad (18)$$

Из выражений (15), (17), (18) следует, что составляющая кратности $2m$ разложения возмущения границы в ряд Фурье дает поправку к собственному значению только для тех волн, которые имеют угловые функции кратности m. Собственные значения при этом расщепляются.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Меркулов. О структуре поля в цилиндрических волноводах сложного сечения. Акуст. ж., 1959, 5, 4, 428—431.
2. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2, М., Физматгиз, 1958.
3. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I, изд. 2, М.—Л., ГТТИ, 1951.

Москва

Поступила в редакцию
21 мая 1964 г.