АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 1

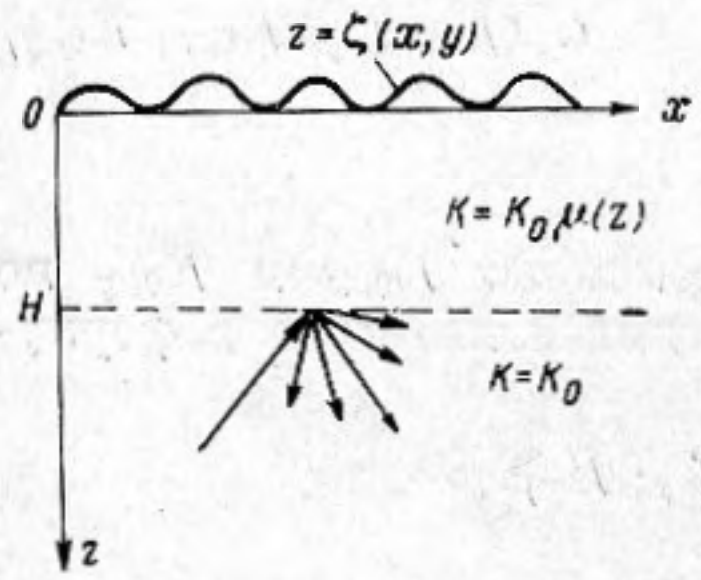
УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, ПРОШЕДШЕЙ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ, НА ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ *

Ю. П. Лысанов

Получено точное решение задачи о дифракции плоской волны, прошедшей через неоднородный слой, на периодически неровной поверхности произвольной формы. Для коэффициентов разложения поля (или его нормальной производной) на неровной поверхности в ряд по полной системе функций получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений, для решения которой может быть использован один из стандартных методов (например, метод итераций).

Задача о дифракции волн на неровной поверхности в условиях, осложненных наличием неоднородностей в прилегающем к поверхности слое, представляет существенный интерес, например, при рассмотрении отражения подводного звука от волнующейся поверхности океана, приповерхностный слой которого, как известно, весьма неоднороден. В настоящей статье рассматривается один из возможных вариантов этой задачи: неровная поверхность считается периодической, но произвольной формы, а неоднородности в приповерхностном слое — слоистыми.



Пусть плоская монохроматическая волна падает под произвольным углом из однородного полупространства $z > H$ на неоднородный слой, ограниченный поверхностями $z = H$ и $z = \zeta(x, y)$, где $\zeta(x, y)$ — периодическая функция x и y с периодами, равными l_1 и l_2 соответственно ($\zeta(x, y) \leqslant 0$ (см. фигуру). Никаких ограничений на параметры неровной поверхности (высоту неровностей, пространственные периоды) не накладывается. Единственное предположение состоит в том, что функция $\zeta(x, y)$ считается кусочно дифференцируемой по x и y. Неоднородные свойства среды в слое $\zeta(x, y) \leqslant z \leqslant H$ характеризуются показателем преломления $\mu(z)$, который является функцией только вертикальной координаты z. Плотность среды ρ во всем полупространстве $z > \zeta(x, y)$ считается постоянной.

Введем функции $\psi_0(x, y, z)$, $\tilde{\psi}(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$, которые описывают поля в полупространстве $z > H$, слое $0 \leqslant z \leqslant H$ и в области $\zeta(x, y) \leqslant z \leqslant 0$ соответственно. Так как структура поля в однородном полупро-

---

* По материалам доклада, прочитанного на Третьем всесоюзном симпозиуме по дифракции волн в г. Тбилиси, 24—30 сентября 1964 г.

странстве и слое $0 \leqslant z \leqslant H$ известна, то функции $\psi_0(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ могут быть записаны в явном виде:

$$\psi_0(x, y, z) = e^{i(\alpha_0 x + \beta_0 y - \gamma_{00} z)} + \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} e^{i(\alpha_n x + \beta_m y + \gamma_{nm} z)*}, \tag{1}$$

где первый член представляет падающую волну, остальные — дифрагированное поле, состоящее из зеркально отраженной волны ($n = m = 0$) и дифрагированных волн высших номеров. Здесь (α_0, β_0, γ_{00}) составляющие волнового вектора падающей волны по координатным осям, удовлетворяющие условию $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_{00}^2 = k_0^2$, где k_0 — волновое число в однородной среде, $\alpha_n = \alpha_0 + nq_1$, $\beta_m = \beta_0 + mq_2$, $\gamma_{nm} = \sqrt{k_0^2 - (\alpha_n^2 + \beta_m^2)}$, причем $q_1 = 2\pi / l_1$ и $q_2 = 2\pi / l_2$. Знак корня выбирается таким, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im} \gamma_{nm} > 0$ при $\operatorname{Im} k_0 > 0$. В формуле (1) A_{nm} — неизвестные амплитуды дифрагированных волн, подлежащие определению.

Аналогично

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} (B_{nm}^{(1)} F_{nm}^{(1)}(z) + B_{nm}^{(2)} F_{nm}^{(2)}(z)) e^{i(\alpha_n x + \beta_m y)}, \tag{2}$$

где $F_{nm}^{1,2}(z)$ — два линейно-независимых решения уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2 F_{nm}}{dz^2} + [k_0^2 \mu^2(z) - (\alpha_n^2 + \beta_m^2)] F_{nm} = 0. \tag{3}$$

Выразим коэффициенты $B_{nm}^{(1,2)}$ через значения функции $\tilde{\psi}(x, y, z)$ и ее нормальной производной $\partial\tilde{\psi} / \partial\nu$ на неровной поверхности. Обобщая метод работы [1] на случай неоднородной среды, введем вспомогательные функции

$$\varphi_{nm}^{(1,2)}(x, y, z) = F_{nm}^{(1,2)}(z) e^{-i(\alpha_n x + \beta_m y)}, \tag{4}$$

являющиеся частными решениями уравнения (3), и проинтегрируем по области V: $(\zeta(x, y) \leqslant z \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2)$ выражение

$$\tilde{\psi} \Delta \varphi_{nm}^{(1,2)} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \Delta \tilde{\psi}.$$

Так как в рассматриваемой области никаких источников поля нет, то

$$\int_V (\tilde{\psi} \Delta \varphi_{nm}^{(1,2)} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \Delta \tilde{\psi})\, dv \equiv 0.$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса — Остроградского

$$\int_V (\tilde{\psi} \Delta \varphi_{nm}^{(1,2)} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \Delta \tilde{\psi})\, dv = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\tilde{\psi} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(1,2)}}{\partial z} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right)_{z=0} dx\, dy -$$

$$- \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left[\left(\tilde{\psi} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(1,2)}}{\partial \nu} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \right) \frac{1}{\nu_z} \right]_{z=\zeta(x, y)} dx\, dy = 0,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к неровной поверхности.

Учитывая, что при $z = 0$ $\tilde{\psi} = \psi$ и $\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} = \dfrac{\partial \psi}{\partial z}$, получаем

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left(\psi \frac{\partial \varphi_{nm}^{(1,2)}}{\partial z} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} dx\, dy =$$

---

* Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем.

$$= \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left[\left(\tilde{\psi} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(1,2)}}{\partial \nu} - \varphi_{nm}^{(1,2)} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \right) \frac{1}{\nu_z} \right]_{z=\zeta(x,y)} dx\, dy. \tag{5}$$

Подставляя выражения (2) и (4) в левую часть уравнения (5), мы приходим к выражению

$$B_{nm}^{(1,2)} = \pm \frac{1}{l_1 l_2 W_{nm}} \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left[\left(\tilde{\psi} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(2,1)}}{\partial \nu} - \varphi_{nm}^{(2,1)} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \right) \frac{1}{\nu_z} \right]_{z=\zeta(x,y)} dx\, dy, \tag{6}$$

где знак плюс перед интегралом относится к $B_{nm}^{(1)}$, а знак минус — к $B_{nm}^{(2)}$. Здесь

$$W_{nm} = \left(F_{nm}^{(1)} \frac{dF_{nm}^{(2)}}{dz} - F_{nm}^{(2)} \frac{dF_{nm}^{(1)}}{dz} \right)_{z=0}.$$

Граничные условия при $z = H$: $\psi_0 = \psi$ и $\partial\psi_0 / \partial z = \partial\psi / \partial z$ определяют соотношение между коэффициентами $B_{nm}^{(1)}$ и $B_{nm}^{(2)}$:

$$B_{nm}^{(1)} Q_{nm}^{(1)} + B_{nm}^{(2)} Q_{nm}^{(2)} = \begin{cases} 2e^{-i\gamma_{nm}H} & n = m = 0 \\ 0 & n \neq 0 \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

где

$$Q_{nm}^{(1,2)} \equiv \left(F_{nm}^{(1,2)} - \frac{1}{i\gamma_{nm}} \frac{dF_{nm}^{(1,2)}}{dz} \right)_{z=H}.$$

Искомые коэффициенты A_{nm} определяются через $B_{nm}^{(1,2)}$ по формуле

$$A_{nm} - [B_{nm}^{(1)} F_{nm}^{(1)}(H) + B_{nm}^{(2)} F_{nm}^{(2)}(H)]\, e^{-i\gamma_{nm}H} = \begin{cases} -e^{-2i\gamma_{nm}H} & n = m = 0 \\ 0 & n \neq 0,\ m \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Исключая из уравнения (7) с помощью соотношений (6) коэффициенты $B_{nm}^{(1,2)}$, получаем

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left\{ \left[\tilde{\psi} \left(Q_{nm}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(2)}}{\partial \nu} - Q_{nm}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{nm}^{(1)}}{\partial \nu} \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \left(Q_{nm}^{(1)} \varphi_{nm}^{(2)} - Q_{nm}^{(2)} \varphi_{nm}^{(1)} \right) \right] \frac{1}{\nu_z} \right\}_{z=\zeta(x,y)} dx\, dy =$$
$$= \begin{cases} 2 l_1 l_2 W_{nm} e^{-i\gamma_{nm}H} & n = m = 0 \\ 0 & n \neq 0,\ m \neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Если на неровной поверхности имеет место граничное условие $\tilde{\psi}|_{z=\zeta(x,y)} = 0$ (абсолютно податливая поверхность) или $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu}\Big|_{z=\zeta(x,y)} = 0$ (абсолютно жесткая поверхность), или если граничное условие задано в виде линейной комбинации $\partial\tilde{\psi} / \partial\nu$ и $\tilde{\psi}$, то соотношение (9) превращается в интегральное уравнение для $\partial\tilde{\psi} / \partial\nu$ или $\tilde{\psi}$ на неровной поверхности. После определения $\partial\tilde{\psi} / \partial\nu$ или $\tilde{\psi}$ на неровной поверхности, амплитуды дифрагированных волн A_{nm} рассчитываются последовательно по формулам (6) и (8).

Рассмотрим, например, случай, когда поверхность $z = \zeta(x, y)$ является абсолютно податливой, т. е. $\tilde{\psi}(x, y, \zeta(x, y)) = 0$. Тогда интегральное уравнение будет иметь вид

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \frac{1}{\nu_z} \left(Q_{nm}^{(1)} \varphi_{nm}^{(2)} - Q_{nm}^{(2)} \varphi_{nm}^{(1)} \right) \right]_{z=\zeta(x,y)} dx\, dy =$$

$$= \begin{cases} -2l_1 l_2 W_{nm} e^{-i\gamma_{nm}H} & n = m = 0 \\ 0 & n \neq 0,\ m \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Раскладывая неизвестную функцию в ряд

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\nu}\frac{1}{\nu_z} = \sum_{k,\,l=-\infty}^{+\infty} C_{kl}\, e^{i(\alpha_k x+\beta_l y)},$$

мы получаем для определения коэффициентов C_{kl} этого ряда следующую систему линейных алгебраических уравнений.

$$\sum_{k,\,l=-\infty}^{+\infty} C_{kl} D_{nmkl} = \begin{cases} -2l_1 l_2 W_{nm} e^{-i\gamma_{nm}H} & n = m = 0 \\ 0 & n \neq 0,\ m \neq 0, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$D_{nmkl} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} (Q_{nm}^{(1)} F_{nm}^{(2)} - Q_{nm}^{(2)} F_{nm}^{(1)})_{z=\zeta(x,\,y)}\, e^{i(k-n)q_1 x + i(l-m)q_2 y}\, dx\, dy.$$

Анализ системы уравнений (11) не представляет принципиальных трудностей. Для ее решения может быть использован один из стандартных методов (например, метод редукции).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Баранцев. Рассеяние плоской волны на двоякопериодической поверхности произвольной формы. Акуст. ж., 1961, 7, 2, 155—158.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
4 ноября 1964 г.