АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 2

УДК 534.113

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ПО СТЕРЖНЮ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСРЕДОЧЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Ю. И. Бобровницкий, В. П. Маслов

Решается задача о распространении изгибных волн по бесконечному стержню с произвольной периодической сосредоточенной нагрузкой. Дисперсионное уравнение анализируется в случае нулевой нагрузки к моменту сил. Рассмотрены случаи массовой и упругой нагрузки к силе. Приводится дискретная модель однородного и нагруженного стержней.

Задача о распространении изгибных волн по стержню с периодической сосредоточенной нагрузкой возникла в связи с исследованием вибраций некоторых практических конструкций и рассматривалась во многих работах. Фогель [1], изучая линейные уравнения с периодическими коэффициентами, получил дисперсионное уравнение для стержня с сосредоточенными массами без учета их момента инерции. Более общее уравнение (с учетом момента инерции) было выведено матричным методом Кремером и Лейлихом [2], которые отметили наличие двух корней для постоянной распространения и привели дисперсионные кривые для стержня с массовой нагрузкой. Несколько позднее были получены более простые уравнения для высоких частот [3, 4]. Был исследован также стержень, опертый в регулярно расположенных точках [5]. Эти, полученные разными методами, результаты удобны для вычисления постоянной распространения конкретной периодической структуры. Однако их общее рассмотрение затруднительно не столько из-за громоздкости, сколько из-за неудобства записи.

Ниже задача решается на основе метода, позволяющего получить общее дисперсионное уравнение в удобной для анализа форме. Метод состоит в следующем. Распространение изгибной волны рассматривается как взаимодействие однородного стержня и нагрузки посредством сил и моментов сил реакции. При этом оказывается, что гармоническое движение однородного стержня под действием этих сил и моментов, так же как и для нагрузки, полностью определяется некоторой матрицей 2-го порядка. Иначе говоря, стержень и нагрузка относительно сил и моментов сил реакции могут быть представлены в виде четырехполюсников, а дисперсионным уравнением является уравнение для собственных частот соединения этих четырехполюсников. Полученное уравнение подробно рассматривается в случае нулевой нагрузки для момента сил. С помощью приведенного далее графика можно легко определить характер распространения на любой частоте и приближенно начертить дисперсионную кривую при произвольных параметрах стержня и нагрузки. В работе приводится дискретная модель рассматриваемой структуры, позволяющая объяснить некоторые физические особенности задачи (наличие двух корней постоянной распространения, бесконечное число чередующихся полос пропускания и непропускания и др.).

Предполагается, что нагрузка на стержень сосредоточена в точках с координатами $x = nd$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, расположена симметрично отно-

сительно нейтральной оси стержня и характеризуется комплексными жесткостями для силы $Z_F = F / w$ и для момента $Z_M = M / \alpha$, где F — сила, M — момент сил, w — смещение и α — угол поворота. Кроме того предполагается, что в стержне нет потерь и нагрузка состоит из чисто реактивных элементов.

Пусть в бесконечном нагруженном таким образом стержне существует изгибная волна некоторой частоты ω. В силу теоремы Флоке смещения и углы поворота стержня в нагруженных точках связаны между собой соотношениями:

$$w(nd) = w(0)\, e^{i\mu nd}, \qquad \alpha(nd) = \alpha(0)\, e^{i\mu nd}, \tag{1}$$

где μ — постоянная распространения волны. Рассматривается установившееся движение, и временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и ниже опускается. Взаимодействие стержня с нагрузкой определяется силами и моментами сил реакции. Сумма этих сил и моментов в каждой нагруженной точке должна быть равна нулю:

$$F_{\text{с}}(nd) + F_{\text{н}}(nd) = 0, \qquad M_{\text{с}}(nd) + M_{\text{н}}(nd) = 0, \tag{2}$$

где $F_{\text{с}}$ и $M_{\text{с}}$ действуют на стержень, $F_{\text{н}}$ и $M_{\text{н}}$ — на нагрузку, и n пробегает все целые значения. В силу симметрии структуры для сил и моментов выполняются аналогичные (1) соотношения. Существование в нагруженном стержне изгибной волны с постоянной распространения μ эквивалентно вынужденным колебаниям однородного стержня и нагрузки под действием сил и моментов сил реакции, т. е. воздействий вида

$$F(nd) = F(0)\, e^{i\mu nd}, \qquad M(nd) = M(0)\, e^{i\mu nd}. \tag{3}$$

Движение нагрузки полностью определяется ее жесткостями Z_F и Z_M:

$$\begin{pmatrix} F_{\text{н}}(nd) \\ M_{\text{н}}(nd) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_F & 0 \\ 0 & Z_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(nd) \\ \alpha(nd) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Колебания однородного стержня при воздействии (3) могут быть представлены в таком же виде. Действительно, движение под действием силы F и момента сил M, приложенных в точке x_0, определяется формулой $w(x) = FG(x / x_0) + MG_{x_0}'(x / x_0)$, где $G(x / x_0) = (4Bk^3)^{-1}[i \exp(ik|x - x_0|) - \exp(-k|x - x_0|)]$ — функция Грина однородного стержня, k волновое число и B — жесткость на изгиб. Колебание при воздействии (3) находятся отсюда по принципу суперпозиции. При $x = 0$ оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} w(0) \\ \alpha(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\text{с}}(0) \\ M_{\text{с}}(0) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где введены обозначения:

$$Y_{11} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(0/nd)\, e^{i\mu nd} = \frac{1}{4Bk^3}\left(\frac{\sin kd}{\cos kd - \cos \mu d} - \frac{\operatorname{sh} kd}{\operatorname{ch} kd - \cos \mu d}\right),$$

$$Y_{12} = -Y_{21} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{x_0}'(0/nd)\, e^{i\mu nd} =$$

$$= \frac{i \sin \mu d}{4Bk^2}\left(\frac{1}{\cos kd - \cos \mu d} - \frac{1}{\operatorname{ch} kd - \cos \mu d}\right), \tag{6}$$

$$Y_{22} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{xx_0}''(0/nd)\, e^{i\mu nd} = \frac{1}{4Bk}\left(\frac{\sin kd}{\cos kd - \cos \mu d} + \frac{\operatorname{sh} kd}{\operatorname{ch} kd - \cos \mu d}\right)$$

Умножая обе части равенства (5) на exp $(i\mu nd)$ и выражая силу F_c и момент сил M_c через смещение и угол поворота, получим для стержня решение, аналогичное формуле (4):

$$\begin{pmatrix} F_c(nd) \\ M_c(nd) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} Z_{12} \\ Z_{21} Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(nd) \\ \alpha(nd) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Величины Z_{ik} есть функции параметров стержня и постоянной распространения μ. Подстановка выражений (4) и (7) в формулу (2) и учет того, что смещения и углы поворота стержня и нагрузки в местах их крепления одинаковы, приводит к однородной линейной системе двух уравнений с двумя неизвестными $w(nd)$ и $\alpha(nd)$. Чтобы в рассматриваемой периодической структуре существовала изгибная волна, определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} Z_{12} + Z_F & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} + Z_M \end{vmatrix} = 0,$$

или после преобразований

$$\Lambda = 1 + Z_F Y_{11} + Z_M Y_{22} + Z_F Z_M \Delta = 0, \tag{8}$$

где

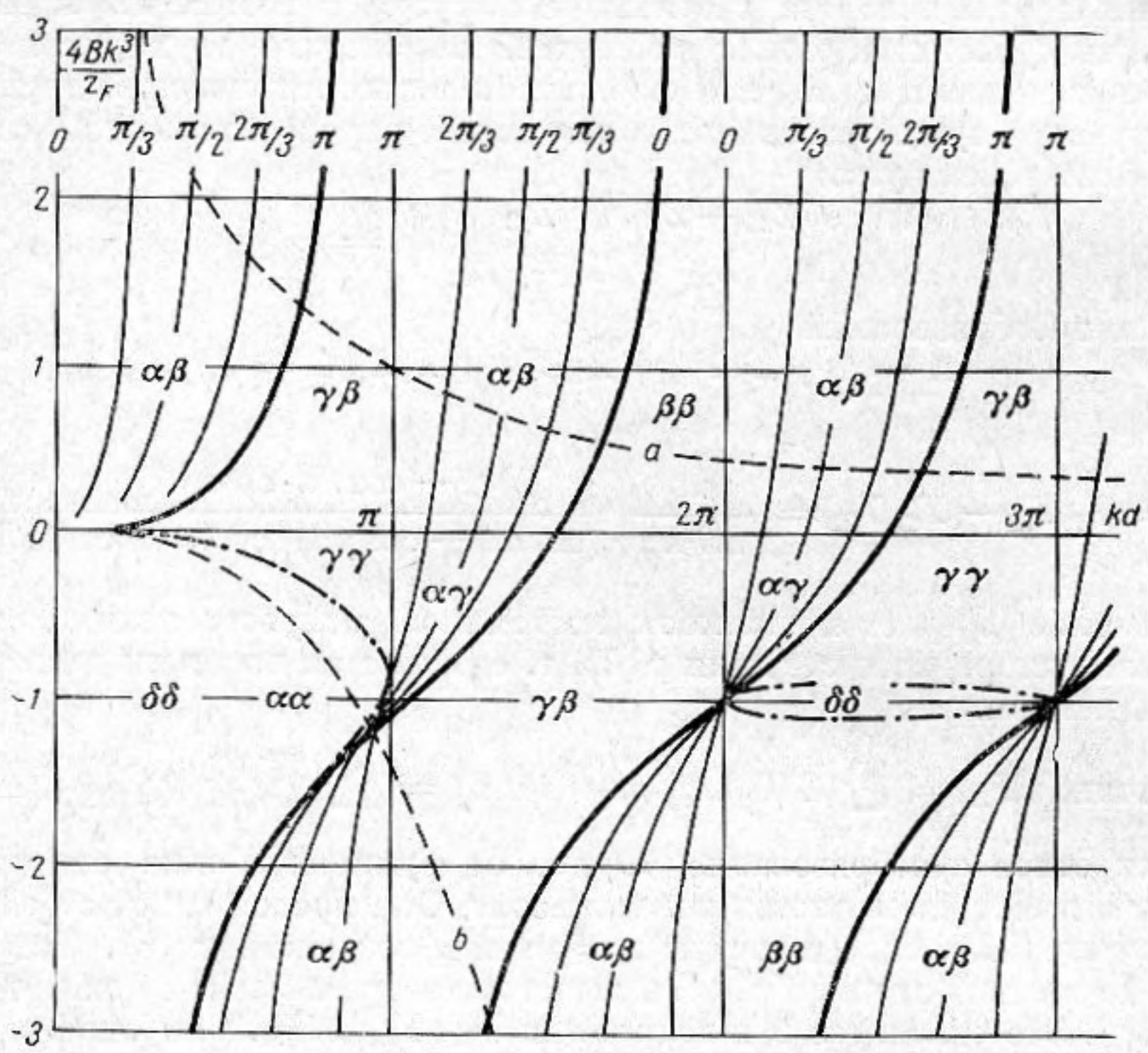
$$\Delta = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} = \frac{1}{8B^2 k^4} \frac{1 - \cos kd \cdot \operatorname{ch} kd}{(\cos kd - \cos \mu d)(\operatorname{ch} kd - \cos \mu d)}$$

Уравнение (8) дает зависимость постоянной распространения от волнового числа однородного стержня $\mu(k)$, т. е. является искомым дисперсионным уравнением.

Величина $Y_{11} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} G(0/nd) \exp(i\mu nd) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} G(nd/0) \exp(-i\mu nd)$ есть дискретное преобразование Фурье от функции Грина однородного стержня и имеет размерность податливости. Она представляет собой отношение смещения к силе в точках $x = nd$ при воздействии (3). Тот факт, что она не зависит от числа n, есть следствие теоремы Флоке (см. формулы (1) и (3)). Это относится и к величинам Y_{12}, Y_{21} и Y_{22}. Они определяются как дискретные преобразования Фурье от производных функций Грина — и вместе с Y_{11} составляют матрицу податливостей относительно воздействий (3).

Уравнение (8) — квадратное относительно $\cos \mu d$. При любых нагрузках Z_F и Z_M в структуре существует две волны частоты ω с разными постоянными распространения μ_1 и μ_2. При $Z_F = Z_M = 0$ уравнение приводит к соотношениям для однородного стержня $\cos \mu_1 d = \cos kd$ и $\cos \mu_2 d = \operatorname{ch} kd$. Неоднозначная зависимость $\mu(w)$ наблюдается и в дискретных решетках, состоящих из частиц, взаимодействующих по определенному закону (см. [6] гл. 3). Для одномерной цепочки, в которой взаимодействуют только смежные частицы, эта зависимость однозначна. Если каждая частица взаимодействует с $2n$ ближайшими соседними, она будет n-значной. Чтобы такая цепочка была моделью стержня, нужно чтобы каждая частица взаимодействовала с четырьмя соседними. В самом деле пусть расстояние между соседними частицами одинаково и равно l. Тогда, если x_m — смещение m-той частицы и смежные частицы отталкиваются с силой $-4\varkappa(x_{m+1} - x_m)$, а «вторые соседи» притягиваются с силой $\varkappa(x_{m+2} - x_m)$, дисперсионное уравнение такой цепочки будет $m\omega^2 = 4\varkappa(1 - \cos kl)^2$, где m — масса частицы, k — постоянная распространения и $\varkappa > 0$. Для больших длин волн $kl \ll 1$. Это уравнение дает $\omega^2 = (\varkappa l^4 / m) k^4$, что совпадает с дисперсионным уравнением однородного стержня. Величина m / l здесь соответствует линейной плотности, $\varkappa l^3$ — изгибной жесткости стержня B. Указанный вид взаимодействия в цепочке приводит, таким образом, к известному факту, что в однородном стержне

на одной частоте могут существовать две волны с действительным и мнимым значениями волнового числа. Используя эти результаты, можно построить дискретную модель стержня с периодической нагрузкой. Положим для простоты, что в точках $x = nd$ стержень нагружен массами M и что $Z_M = 0$. Отрезок стержня длиной d моделируется с помощью N частиц массы m / N, отстоящих друг от друга на расстоянии $l = d / N$. Эти частицы взаимодействуют между собой и с нагрузками по тому же «изгибному» закону, что и в модели для однородного стержня. Поэтому двузначная зави-



симость $\mu(\omega)$ сохраняется, но обратная зависимость $\omega(\mu)$ становится N-значной. Первая ветвь кривой этой зависимости является акустической, остальные — оптическими (см. [6], гл. 4). Для низких частот достаточно положить $l = d$ и считать, что масса m отрезка стержня сосредоточена в нагруженной точке. Это модель однородного стержня с линейной плотностью $(M + m) / d$. Другими словами, стержень с массами на низких частотах можно заменять более тяжелым однородным. Оптических ветвей в этом случае нет.

Чтобы модель была верной на высоких частотах, число частиц N должно быть таким, чтобы выполнялось неравенство $kl \ll 1$. При переходе к пределу $N \to \infty$ число оптических ветвей стремится к бесконечности. Это объясняет существование в стержне с периодической массовой нагрузкой бесконечного числа чередующихся полос пропускания и непропускания (см. ниже). Можно показать, что к подобным результатам приводит и модель стержня с произвольной сосредоточенной нагрузкой.

Рассмотрим подробнее дисперсионное уравнение (8) в частном случае нулевой нагрузки для момента сил $Z_M = 0$:

$$\Lambda = \frac{\sin kd}{\cos kd - \cos \mu d} - \frac{\operatorname{sh} kd}{\operatorname{ch} kd - \cos \mu d} + \frac{4Bk^3}{z_F} = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение, если его написать в виде квадратного трехчлена относительно $\cos \mu d$, совпадает с уравнением, полученным в работе [1]. Однако

исследовать его удобнее в записи (9). Постоянная распространения μ может принимать действительные, комплексные и мнимые значения. На плоскости, где по осям отложены безразмерные величины kd и $-4Bk^3/Z_F$, каждому типу μ соответствуют определенные области (см. фигуру). Границами между областями являются кривые (9), для которых $\cos\mu d = \pm 1$:

$$-\frac{4Bk^3}{Z_F} = -\operatorname{ctg}\frac{kd}{2} - \operatorname{cth}\frac{kd}{2}, \qquad -\frac{4Bk^3}{Z_F} = \operatorname{tg}\frac{kd}{2} - \operatorname{th}\frac{kd}{2}, \tag{10}$$

и их асимптоты $kd = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ На фигуре эти кривые отмечены числами 0 и π. Между ними расположены области пропускания, т. е. области, в которых одно из значений μ действительно: $|\cos\mu d| < 1$. В этих областях проходят кривые для различных действительных значений μ. Тонкие линии на фигуре соответствуют $\mu d = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, штрихпунктирные кривые — это огибающие линий уровня μ. Они также являются граничными. Уравнения огибающих

$$-\frac{4Bk^3}{Z_F} = \frac{(\sqrt{\sin kd} \pm \sqrt{\operatorname{sh} kd})^2}{\cos kd - \operatorname{ch} kd} \tag{11}$$

находятся из системы двух уравнений $\Lambda = 0$ и $\partial\Lambda/\partial(\cos\mu d) = 0$ после исключения из них $\cos\mu d$. На фигуре буквами α, β, γ и δ указано, какие типы волн могут существовать в той или иной области, причем α соответствует распространяющейся волне $\exp(i\mu_2 nd)$, β — неоднородной $\exp(-\mu_1 nd)$, γ — волне типа $(-1)^n(-\mu_1 nd)$ и δ — затухающей волне $\exp(-\mu_1 + i\mu_2)nd$, где μ_1 и μ_2 положительны. Например, $\alpha\beta$ означает, что в данной области могут возникнуть лишь два типа волн — распространяющаяся $\exp(i\mu_2 nd)$ и неоднородная $\exp(-\mu_1 nd)$. Конкретному значению нагрузки Z_F на фигуре соответствует некоторая кривая $-4Bk^3/Z_F = f(kd)$, проходящая через различные области и пересекающая уровни действительных значений μ. Начертив эту кривую, можно качественно определить характер распространения в любом частотном диапазоне и построить приближенную дисперсионную кривую $\mu(k)$. Для получения точных результатов следует обращаться непосредственно к уравнению (9).

Пусть нагрузкой является сосредоточенная масса M. Тогда $Z_F = -\omega^2 M$ и $-4Bk^3/Z_F = 4m/Mkd$, где m — масса отрезка стержня длиной d. Эта кривая для $4m/M = \pi$ обозначена на фигуре буквой a. Она начинается в области пропускания. На низких частотах могут существовать две волны $\exp(-\mu_1 nd)$ и $\exp(i\mu_2 nd)$. Затем распространяющаяся становится неоднородной $(-1)^n \exp(-\mu_2 nd)$. Это полоса непропускания. При дальнейшем повышении частоты следуют чередующиеся полосы пропускания и непропускания. Левые границы полос пропускания $kd = \pi n$ являются собственными частотами опертого стержня длиной d; на этих частотах массы M неподвижны. Правые границы представляют собой решения уравнений (10). Первое соответствует собственным частотам отрезка стержня длиной d и массой M в середине и с граничными условиями $\alpha = w''' = 0$ на концах [7]. Все нагрузки движутся в фазе. Решениями второго уравнения (10) являются собственные частоты такого же отрезка стержня, но опертого по краям. Соседние нагрузки колеблются в противофазе. Кривая $\mu(k)$ для массовой нагрузки аналогична дисперсионной кривой электрической линии, нагруженной индуктивностями ([6], гл. 10) с той разницей, что для линии полосы пропускания с увеличением частоты сужаются и исчезают, тогда как для стержня их ширина стремится к конечному пределу.

Для упругой нагрузки $Z_F = C$ и $-4Bk^3/Z_F = -(4B/Cd^3)(kd)^3$. Ей на фигуре соответствует пунктирная кривая b для которой $4B/Cd^3 = 0{,}04$. На низких частотах ($kd \ll 1$) конструкция ведет себя как балка на сплошном упругом основании, и оба корня μ_1 и μ_2 комплексны (область $\delta\delta$). При повышении частоты комплексные корни переходят в два действительных ($\alpha\alpha$). На границе областей $\delta\delta$ и $\alpha\alpha$, т. е. при пересечении кривой b и огибаю-

щей μ_1 и μ_2 — действительны и одинаковы. Обе волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями. Групповые скорости, однако, различны. Характерной особенностью области $\alpha\alpha$ является то, что для одной волны знаки фазовой и групповой скоростей совпадают, для другой они противоположны. При дальнейшем повышении частоты следуют чередующиеся полосы пропускания и непропускания. Полосы непропускания сужаются и пропадают, т. к. на высоких частотах упругие нагрузки оказывают незначительное влияние на колебания стержня. Как и для массовой нагрузки, границы полос определяются из уравнений (10) и (11). Дисперсионная кривая стержня с периодической упругой нагрузкой аналогична дисперсионной кривой длинной электрической линии, периодически нагруженной емкостями [6], и отличается от нее тем, что в области $\alpha\alpha$ имеет две ветви.

В заключение отметим, что подобным же образом можно проводить исследование общего уравнения (8):

$$(1 + Z_F Y_{11})(1 + Z_M Y_{22}) - Z_F Z_M Y_{12} Y_{21} = 0. \qquad (8')$$

Для этого в безразмерном пространстве $(kd, -4Bk^3 / Z_F, -4Bk / Z_M)$ проводятся граничные поверхности $\cos \mu d = \pm 1$. Последний член в уравнении (8) обращается в нуль, т. к. при $\mu d = \pi n$ $Y_{12} = Y_2 = 0$, и уравнения этих поверхностей будут $1 + Z_F Y_{11} = 0$ и $1 + Z_M Y_{22} = 0$. Это цилиндрические поверхности, параллельные осям $-4Bk^3 / Z_F$ и $-4Bk / Z_M$. Вместе с огибающими поверхностей уровня μ они разбивают все пространство на области различных типов μ. Нагрузке Z_F и Z_M соответствует кривая в пространстве, проходящая через эти области и пересекающая поверхности уровней μ. Таким образом можно качественно определить характер распространения для произвольной нагрузки.

Авторы пользуются случаем выразить благодарность А. В. Римскому-Корсакову и М. Д. Генкину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. T. Vogel. Sur l'application de la théorie des équations différentielles à coefficients pêriodiques aux problèmes d'appuis élastiques. Compt. Rend., 1949, 228, 2, 162—163.
2. L. Cremer, H. O. Leilich. Zur Theorie der Biegekettenleiter. Arch. Elek. Übertrag., 1953, 7, 6, 261—270.
3. H. L. Müller. Beigewellen — Dämmung and symmetrischen und exzentrischen Sperrmassen. Frequenz, 1957, 11, 10, 325—330; 1957, 11, 11, 342—351.
4. M. Heckl. Wave propagation on beam — plate system. J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, 5, 640—651.
5. J. W. Miles. Vibrations of beams on many supports. Proc. Am. Soc. civil. eng., 1956, 82, EMI, 1—9.
6. Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.
7. Y. Jullien. Vibrations de poutres chargées d'une façon discontinue. Acustica, 1958, 8, 4, 201—211.

Государственный н.-и. институт
машиноведения
Москва

Поступила в редакцию
22 сентября 1964 г.