АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 2

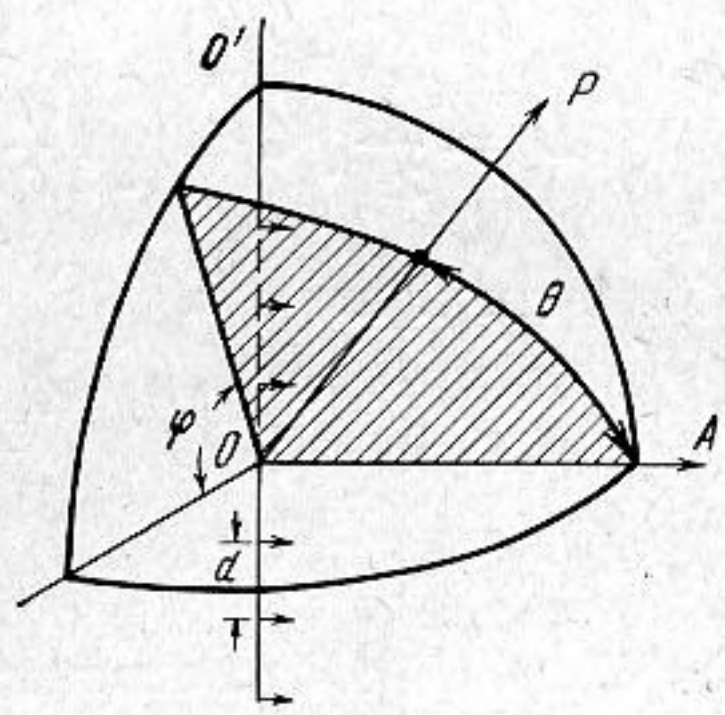
УДК 534.874.1

КОЭФФИЦИЕНТ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАПРАВЛЕННЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Э. Л. Виноградова, В. В. Фурдуев

Расчет коэффициента направленности (коэффициента осевой концентрации излучения) линейной группы, составленной из одинаковых и параллельно ориентированных излучателей, приводит к выводу, что в той области частот, где шаг группы превышает длину волны, этот коэффициент с хорошим приближением определяется произведением числа источников на коэффициент направленности единичного излучателя.

Для расчета звукового поля громкоговорящих устройств необходимо знать коэффициент осевой концентрации Ω излучения или, иначе, коэффициент направленности [1]. В случае громкоговорителей, обладающих осевой симметрией поля излучения, этот коэффициент определяется графическим методом, предложенным Ю. М. Сухаревским: экспериментально найденная нормированная характеристика направленности $D(\theta)$ наносится на специальную функциональную сетку, после чего коэффициент концентрации определяется путем планиметрирования [2]. Задача оказывается значительно более сложной в случае «звуковых колонок», широко используемых в настоящее время в системах озвучания и звукоусиления. Звуковая колонка представляет собой линейную группу, составленную из конусных электродинамических громкоговорителей прямого излучения; очевидно, что звуковое поле таких устройств не обладает осевой симметрией и характеристика направленности в дальней (волновой) зоне зависит от двух угловых координат θ, φ (см. фигуру). Если акустические оси всех излучателей параллельны и образуют прямой угол с линией, вдоль которой расположены источники, то



$$D(\theta, \varphi) = G(\theta) \frac{\sin\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi\right)}{N \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi\right)}, \qquad (1)$$

где N — число излучателей, d — расстояние между центрами соседних громкоговорителей, λ — длина волны; $G(\theta)$ есть характеристика направленности отдельного громкоговорителя, предполагаемая осесимметричной. Для частного случая $G(\theta) = 1$, формула (1) совпадает с результатом расчета, выполненного Штенцелем [3].

Коэффициент направленности есть величина, обратная среднему квадрату характеристики $D(\theta, \varphi)$ при осреднении по поверхности сферы S, охватывающей излучатель, акустический центр которого совпадает с центром сферы:

$$\Omega = \frac{1}{\overline{D^2}}, \quad \overline{D^2} = \frac{1}{S} \int\limits_S D^2 \, dS. \tag{2}$$

В сферических координатах r, θ, φ, элемент поверхности $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$; принимая D согласно формуле (1), получаем

$$\overline{D^2} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} G^2(\theta) \sin\theta \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi d}{2} \sin\theta \sin\varphi\right)} d\varphi \, d\theta. \tag{3}$$

Используя тождество $\frac{\sin^2 Nx}{N^2 \sin^2 x} = \frac{1}{N}\left[1 + \frac{2}{N} \sum\limits_{n=1}^{N-1} (N-n) \cos 2nx\right]$, нетрудно вычислить внутренний интеграл в формуле (3):

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta \sin\varphi\right)} d\varphi = \frac{2\pi}{N}\left[1 + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) J_0\left(n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)\right],$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Таким образом,

$$\overline{D^2} = \frac{1}{2N} \int\limits_0^{\pi} G^2(\theta) \left[1 + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) J_0\left(n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)\right] \sin\theta \, d\theta. \tag{4}$$

Обозначим через

$$\Omega_1 = \frac{2}{\int\limits_0 G^2(\theta) \sin\theta \, d\theta} \tag{5}$$

коэффициент осевой концентрации излучения каждого отдельного громкоговорителя звуковой колонки и введем функции

$$F_n = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} G^2(\theta) J_0\left(n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta\right) \sin\theta \, d\theta; \tag{6}$$

при этом формула (4) приводится к виду:

$$\overline{D^2} = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{\Omega_1} + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) F_n\right]. \tag{7}$$

Отметим, что как Ω_1, так и функции F_n, могут быть определены графически по методу Ю. М. Сухаревского; однако при определении F_n на функциональную сетку нужно наносить не $G(\theta)$, но функцию

$$G(\theta)\left[J_0\left(n \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta\right)\right]^{1/2}.$$

В соответствии с определением (2), напишем выражение для коэффициента осевой концентрации излучения звуковой колонки:

$$\Omega = \frac{N\Omega_1}{1 + \frac{2\Omega_1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}(N-n)F_n}. \tag{8}$$

Рассмотрим предварительно частный случай линейной группы, составленной из N ненаправленных излучателей; в этом простейшем случае $G(\theta) = 1$ и $\Omega_1 = 1$, причем, согласно формуле (6), $F_n = \dfrac{\sin\left(n\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{n\frac{2\pi d}{\lambda}}$.

Коэффициент направленности Ω_0 оказывается равным

$$\Omega_0 = \frac{N}{1 + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N-1}(N-n)\frac{\sin\left(n\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}{n\frac{2\pi d}{\lambda}}}.$$

Этот частный результат был получен Штенцелем [3], которым построены графики функции $\Omega_0(d/\lambda)$ в области $0 \leqslant d/\lambda \leqslant 1{,}6$ при N от 2 до 6.

Нетрудно видеть, что при $d/\lambda = m/2$ (m — целое число), т. е. при частотах $f_m = mc/(2d)$, где c — скорость звука, $\Omega_0 = N$. Наиболее высокий максимум Ω_0 лежит в интервале $0{,}5 < d/\lambda < 1$ и превышает N тем значительнее, чем больше N. В области частот, где $d > \lambda$, коэффициент концентрации осциллирует с убывающим размахом около значения $\Omega_0 = N$.

Обращаясь к общему случаю группы, составленной из направленных источников, можно утверждать, что если характеристика направленности отдельного излучателя имеет максимум при $\theta = 0$ и не имеет побочных максимумов, сравнимых с $G(0)$, то в области частот, где $d \geqslant \lambda$, величина Ω осциллирует около значения $N\Omega_1$ с размахом, убывающим настолько быстро, что это значение может быть принято в качестве приближенной оценки с точностью, совершенно достаточной для инженерных расчетов.

Роль направленности каждого отдельного излучателя можно пояснить следующим наглядным, хотя и чисто иллюстративным примером. Пусть независимо от частоты

$$G(\theta) = \begin{cases} \cos\theta & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

В этом случае

$$\Omega_1 = \frac{2}{\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta} = 6$$

и

$$F_n = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \, J_0\left(n\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right) d\theta = \frac{1}{(nz)^2}\left[\frac{\sin nz}{nz} - \cos nz\right],$$

где $z = 2\pi d / \lambda$. При $z \to 0$, т. е. в области самых низких частот, $F_n(z) \to \to {}^1/_6$ и из формулы (8) следует, что $\Omega = 6$, совпадая с Ω_1; это объясняется тем, что в рассматриваемой области частот группирование излучателей не может привести к обострению направленности. Первый (наиболее высокий) максимум коэффициента направленности лежит вблизи от $d / \lambda = 1$; при этом $2F_n = -1 / (2\pi n)^2$ и

$$\Omega = \frac{N\Omega_1}{1 - \frac{\Omega_1}{4\pi^2 N} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{n^2}} \cong \Omega_{\max}.$$

Из приводимой ниже таблицы видно, что относительная высота первого максимума, т. е. $\Omega_{\max} / (N\Omega_1)$, очень невелика ($<1$ *дб*) и при $N > 5$ практически уже не зависит от N.

N	$N\Omega_1$	$\Omega_{\max}$	$\Omega_{\max}/(N\Omega_1)$	N	$N\Omega_1$	$\Omega_{\max}$	$\Omega_{\max}/(N\Omega_1)$
2	12	12,99	1,08	6	36	43,15	1,20
3	18	20,31	1,13	7	42	50,83	1,21
4	24	27,80	1,16	8	48	58,60	1,22
5	30	35,50	1,185				

При $d > \lambda$ относительные значения максимумов функции $\Omega(N, d / \lambda)$ должны быть еще меньше, т. к. первый максимум является наибольшим. Таким образом, в рассматриваемой области частот приближенная оценка $\Omega \cong N\Omega_1$ может считаться вполне удовлетворительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Международный электротехнический словарь, Группа 08 (Электроакустика). М., 1963, раздел 08—10, термин 215.
2. В. К. Иофе, А. А. Янпольский. Расчетные графики и таблицы по электроакустике. М.— Л, Госэнергоиздат, 1954, стр. 330—332.
3. H. Stenzel. Über die akustische Strahlung von Membranen. Ann. Phys., 1930, **7**, 5, 947—982.

Н.-и. институт строительной физики
Москва

Поступила в редакцию
29 августа 1964 г.