АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XII 1966 Вып. 2

УДК 534.24

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ ЗВУКА ОТ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

И. Г. Лейзер

Рассмотрено в приближении Кирхгофа — Френеля отражение сферической волны от плоской, полностью отражающей поверхности конечных размеров и даны приемы для приближенной практической оценки получающихся при этом отклонений от геометрической акустики.

Приемы геометрической акустики широко используются при акустическом проектировании помещений. Погрешности, возникающие при использовании этих приемов, рассматриваются в работах [1—3], но, как будет видно из дальнейшего, результаты указанных работ нуждаются в поправках.

Если (фиг. 1) на бесконечную, полностью отражающую плоскость П, падают звуковые волны, излучаемые точечным источником Q, то, как отмечается в работах [1—3], в формировании отраженного звука, приходящего в точку приема P, основную роль играет область S плоскости, окружающая точку зеркального отражения O. Точка эта является пересечением плоскости П с прямой $Q'P$, приходящей через точку приема P и мнимый источник Q' (зеркальное отражение источника Q). Естественно поэтому поставить вопрос: каково будет отклонение от законов геометрической акустики, если учитывать отражение не от всей бесконечной плоскости П, а лишь от некоторой ее области S, окружающей точку O. При такой постановке вопроса область S может рассматриваться как излучатель с заданным распределением колебательной скорости. Рассматриваемая задача равносильна, как отмечено в работе [1], поставленной в приближении Кирхгофа дифракционной задаче о прохождении звука, излучаемого источником Q', через отверстие S в бесконечном звуконепроницаемом плоском экране.

Задача имеет и более общее значение, т. к. исследования сравнительно недавнего времени показали, что приближение Кирхгофа допускает значительно более широкое применение, чем это считалось ранее. Например, для задачи о дифракции плоской волны около круглого отверстия или круглого диска сравнение с точным решением и с опытными данными как для нормального, так и для наклонного падения волны показало, что приближение Кирхгофа дает уже достаточно хороший результат, когда диаметр отверстия или диска всего лишь в два раза (и даже несколько менее) превышает длину волны [4—7]. В практических задачах архитектурной акустики зачастую приходится иметь дело с отражением звука от гладкой поверхности, окруженной либо сильно поглощающими звук участками, либо участками, рассеивающими звук. И если размеры такой гладкой поверхности хотя бы в $1^1/_2$—2 раза превышают длину волны, то для примерной практической оценки погрешности, получающейся при рас-

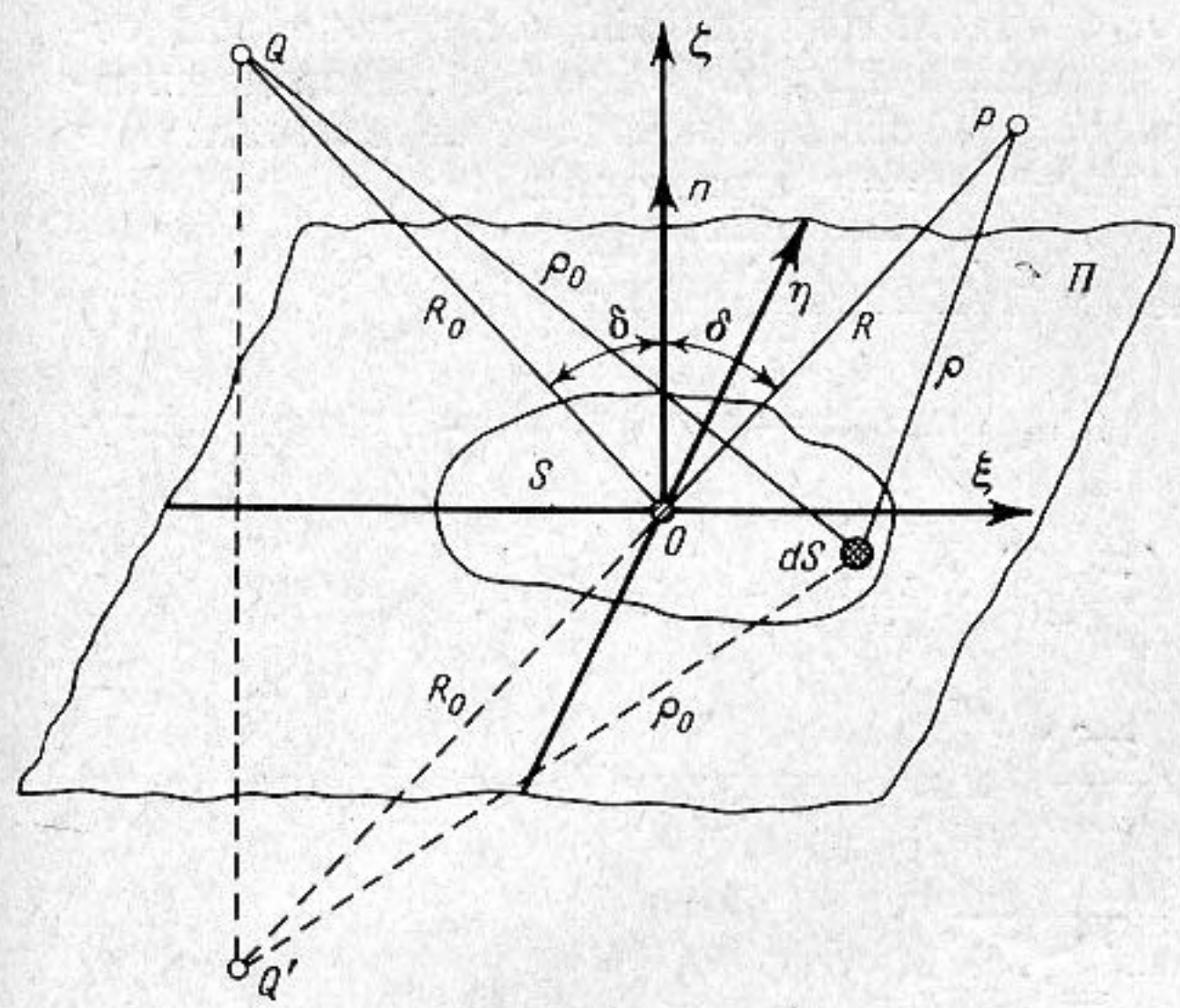
чете отраженного звука приемами геометрической акустики можно воспользоваться приближением Кирхгофа так, как это сформулировано выше.

Пусть источник Q излучает сферическую гармоническую волну, имеющую потенциал скорости $\varphi = e^{ikr}/r$ (с временным фактором $e^{-i\omega t}$). Тогда в поставленной задаче потенциал скорости, вызываемой в точке приема P волной, отраженной от плоской области S, будет [8]

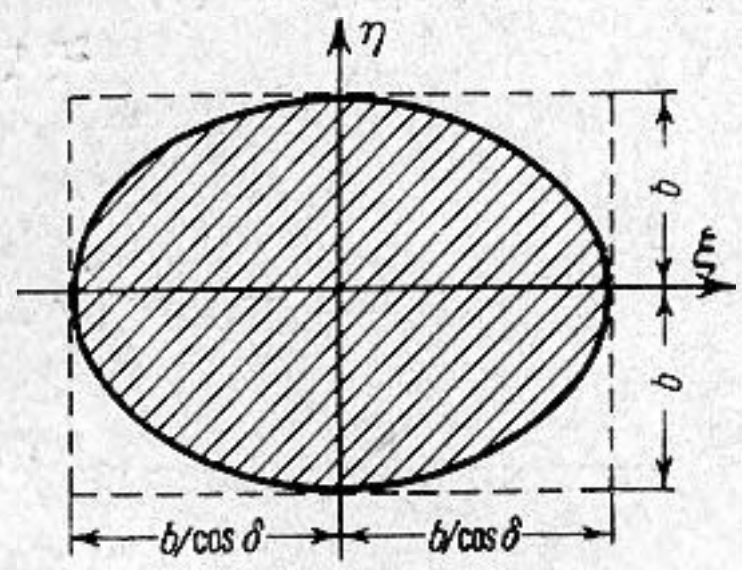
$$\varphi_P = -\frac{ik}{2\pi}\int\limits_S \frac{e^{ik(\rho_0+\rho)}}{\rho_0\rho}\cos(n,\rho)\,dS, \tag{1}$$

где ρ_0 и ρ — расстояния площадки dS от Q и P, n — нормаль этой площадки (фиг. 1), причем ρ_0 должно быть не менее длины волны λ.

Выберем в плоскости П прямоугольную систему координат ξ, η, начало которой совпадает с точкой O, а ось ξ является пересечением плоскости, проходящей через точки



Фиг. 1



Фиг. 2

Q и P и нормаль n, с плоскостью П. Точка приема P находится вне геометрической тени мнимого источника Q', что способствует успешному применению приближения Кирхгофа. Если разложить ρ_0 и ρ в степенной ряд по величинам ξ/ρ_0, η/ρ_0, ξ/ρ, η/ρ и пренебречь третьей и более высокими их степенями (приближение Кирхгофа — Френеля), то формула (1) принимает вид [9]

$$\varphi_P = -i\frac{e^{ik(R_0+R)}}{2(R_0+R)}(M+iN). \tag{2}$$

где R_0 и R — расстояния точки O от источника и точки приема, а δ — угол, образуемый этими направлениями с нормалью (фиг. 1),

$$M = \iint\limits_\sigma \cos\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right]du\,dv,$$
$$N = \iint\limits_\sigma \sin\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right]du\,dv, \tag{3}$$

причем

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,\xi\cos\delta,$$
$$v = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,\eta. \tag{4}$$

Преобразование (4) отображает область S на некоторую область σ с прямоугольными координатами u, v.

Интенсивность отраженного звука в точке P будет

$$|\varphi_P|^2 = \frac{1}{4(R_0+R)^2}(M^2+N^2). \tag{5}$$

Если справедлива геометрическая акустика, то $|\varphi_P|^2 = 1/(R_0+R)^2$ и, таким образом, коэффициент

$$K = \frac{M^2+N^2}{4} \tag{6}$$

характеризует отклонение от геометрической акустики.

Рассмотрим, прежде всего, специальный случай, когда контуром области S является эллипс с полуосями b и $b/\cos\delta$ (фиг. 2), направленными по осям ξ и η. Соответственная область σ в плоскости переменных u, v есть круг с уравнением контура $u^2+v^2=r^2$ и радиусом

$$r = b\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}. \tag{7}$$

Переходя к полярным координатам ($u=\gamma\cos\varphi$, $v=\gamma\sin\varphi$), получим из формулы (3)

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^r \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\rho^2\right)\gamma\,d\gamma\,d\varphi = 2\sin^2\frac{\pi r^2}{2},$$

и аналогично $N = 2\left(1-\cos\frac{\pi r^2}{2}\right)$ и из формулы (6) — коэффициент отклонения от геометрической акустики

$$K = 4\sin^2\frac{\pi r^2}{4}. \tag{8}$$

Коэффициент этот колеблется в постоянных пределах от 0 до 4, причем размахи его уплотняются с возрастанием r. Минимумы ($K=0$) получаются при $r^2=4n$, а максимумы ($K=4$) — при $r^2=4n+2$, где $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

Частный случай, когда область S является кругом, и прямая $Q'P$ (фиг. 1) перпендикулярна к плоскости П, рассмотрен в литературе [10], и полученные для этого случая результаты соответствуют выражению (8).

На плоскости П (фиг. 1) геометрическим местом точек, дающих постоянный пробег $\rho_0+\rho$, является эллипс, причем, в пределах, сделанных при выводе выражений (2) и (3) допущений, центр этого эллипса совпадает с точкой O [3]. Контур области S на фиг. 2 является одним из таких эллипсов. Зонами Френеля, у которых разности пробегов отличаются друг от друга на целое число полуволн, являются эллиптические кольцевые области. Указанные минимумы и максимумы K получаются, когда в эллиптической области S точно укладывается четное или соответственно нечетное число зон Френеля.

В работе [1] для показанной на фиг. 2 области получены иные результаты, на основании тех же выражений (2), (3) и использовании таблиц интегралов Френеля. Изложено это весьма кратко и ход вычислений неясен; как видно из вывода формулы (8), интегралы Френеля здесь не требуются. В работе [1] взят для упрощения частный случай $R_0=R$, причем получается, что отклонение по интенсивности от геометрического отражения не превышает 10%, если $b \geqslant 2\sqrt{R\lambda}$ и составляет ровно 10% (т. е. K равно 0,9, либо 1,1), если $b=2\sqrt{R\lambda}$. В действительности же, при $R_0=R$ и $b=2\sqrt{R\lambda}$, как это видно из формулы (8), $K=0$.

В работах [2, 3] для вычисления интеграла (1) использован приближенный метод стационарной фазы и приняты те же указанные выше допущения (приближение Кирхгофа — Френеля). В результате работы [2, 3] дают оценку отклонения от геометрической акустики при помощи числа полных зон Френеля, укладывающихся в данной отражающей области S. Но, как показано выше, при допущениях, принятых как в настоящей работе, так и в работах [1—3], для целого числа зон Френеля задача решается элементарно, и коэффициент K равен 0, либо 4. Поэтому при сделанных допущениях нельзя указать такое число зон Френеля, выше которого отклонения K от единицы не превысят некоторого заданного сколь угодно малого значения. Поэтому предлагаемая в работах [1—3] оценка отклонения от геометрической акустики при помощи числа умещающихся в области S полных зон Френеля приводит к неверным результатам.

Эллиптическая область S, показанная на фиг. 2, является особым случаем. Для областей иного очертания с увеличением их размеров коэффициент отклонения от геометрической акустики K стремится, колеблясь, к единице. Это можно показать на примере прямоугольной области S со сторонами, параллельными осям ξ и η и с координатами вершин ξ_1, η_1; ξ_1, η_2; ξ_2, η_1; ξ_2, η_2. В плоскости переменных u, v ей соответствует прямоугольная область σ, вершины которой имеют координаты u_1, v_1; u_1, v_2; u_2, v_1; u_2, v_2,

где $u_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,\xi_1 \cos\delta$, $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,\eta_1$ и т. д. Пользуясь интегралами Френеля $C(x) = \int\limits_0^x \cos\frac{\pi}{2}z^2\,dz$, $S(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{\pi}{2}z^2\,dz$, найдем из формулы (3)

$$M = mn - pq,\ N = np + mq, \tag{9}$$

где $m = C(u_2) - C(u_1)$, $n = C(v_2) - C(v_1)$, $p = S(u_2) - S(u_1)$, $q = S(v_2) - S(v_1)$ и коэффициент отклонения от геометрической акустики будет

$$K = \frac{M^2 + N^2}{4} = \frac{(mn)^2 + (pq)^2 + (np)^2 + (mq)^2}{4}. \tag{10}$$

Если у такой прямоугольной области S центр совпадает с началом координат O, и стороны ее, параллельные осям ξ и η, имеют соответственно длины $2a$ и $2b$ (фиг. 3), то из формул (9) мы получим

$$\begin{aligned} M &= 4[C(\alpha)C(\beta) - S(\alpha)S(\beta)], \\ N &= 4[S(\alpha)C(\beta) + C(\alpha)S(\beta)], \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,a\cos\delta, \qquad \beta = \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)}\,b. \tag{12}$$

Если ввести функцию

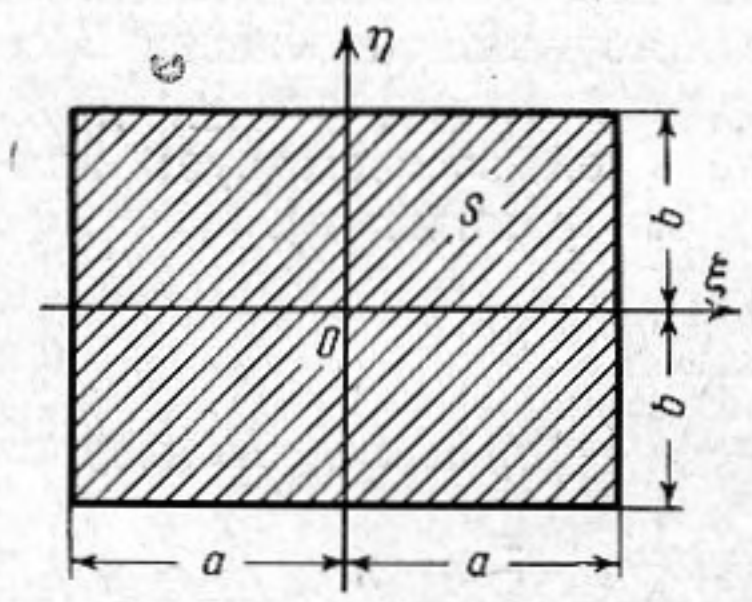
$$\varphi(x) = [C(x)]^2 + [S(x)]^2, \tag{13}$$

то, согласно формуле (10), коэффициент отклонения от геометрической акустики будет

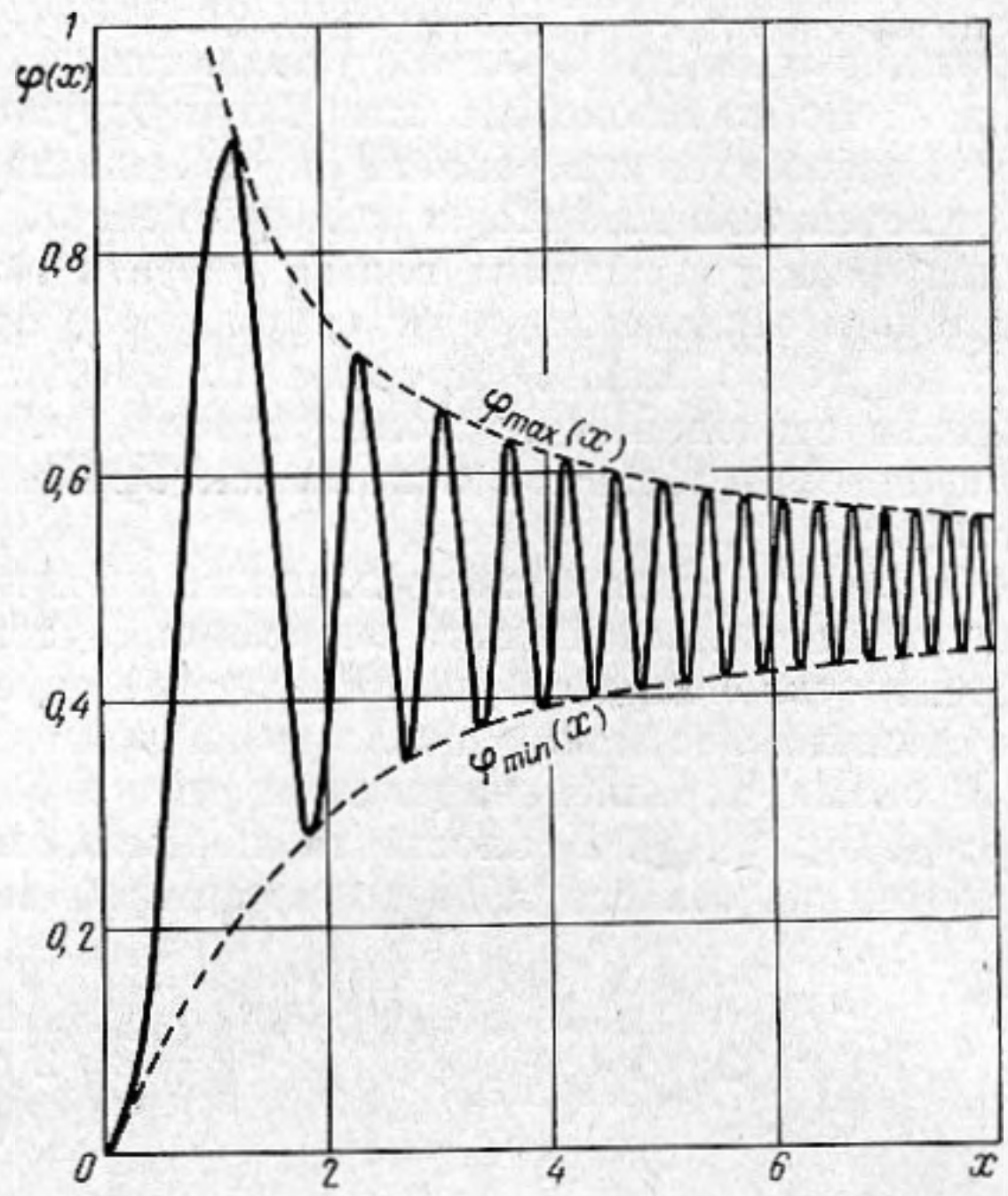
$$K = 4\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta). \tag{14}$$

Начальный участок графика функции $\varphi(x)$ показан на фиг. 4.

Рассматривая $K = 4\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$, как функцию переменных α и β, найдем, что при $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, отличных от нуля, K имеет экстремумы при совместных условиях $\varphi'(\alpha) = 0$ и $\varphi'(\beta) = 0$, т. е. тогда, когда $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ достигают своих экстремальных значений. Из формулы (14) и фиг. 4 видно, что K является сильно колеблющейся функцией; наиболее сильные максимумы (минимумы) ее получаются при совпадении максимумов (минимумов) $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$; при возрастании α и β колебания функции K уменьшаются, и она



Фиг. 3



Фиг. 4

стремится к единице (геометрическая акустика). Так как K претерпевает сильные изменения при небольших изменениях переменных α и β, то для практической оценки наибольших (по абсолютной величине) отклонений от геометрической акустики целесообразно воспользоваться плавной огибающей поверхностью, проходящей через указанные сильные максимумы функции K, и аналогичной поверхностью, проходящей через ее сильные минимумы (рассматривая K, как аппликату прямоугольной системы координат α, β, K). Если провести через максимумы и минимумы графика $\varphi(x)$ плавные огибающие кривые $\varphi_{max}(x)$ и $\varphi_{min}(x)$, показанные на фиг. 4, то, в соответствии с (14), аппликаты огибающих поверхностей будут

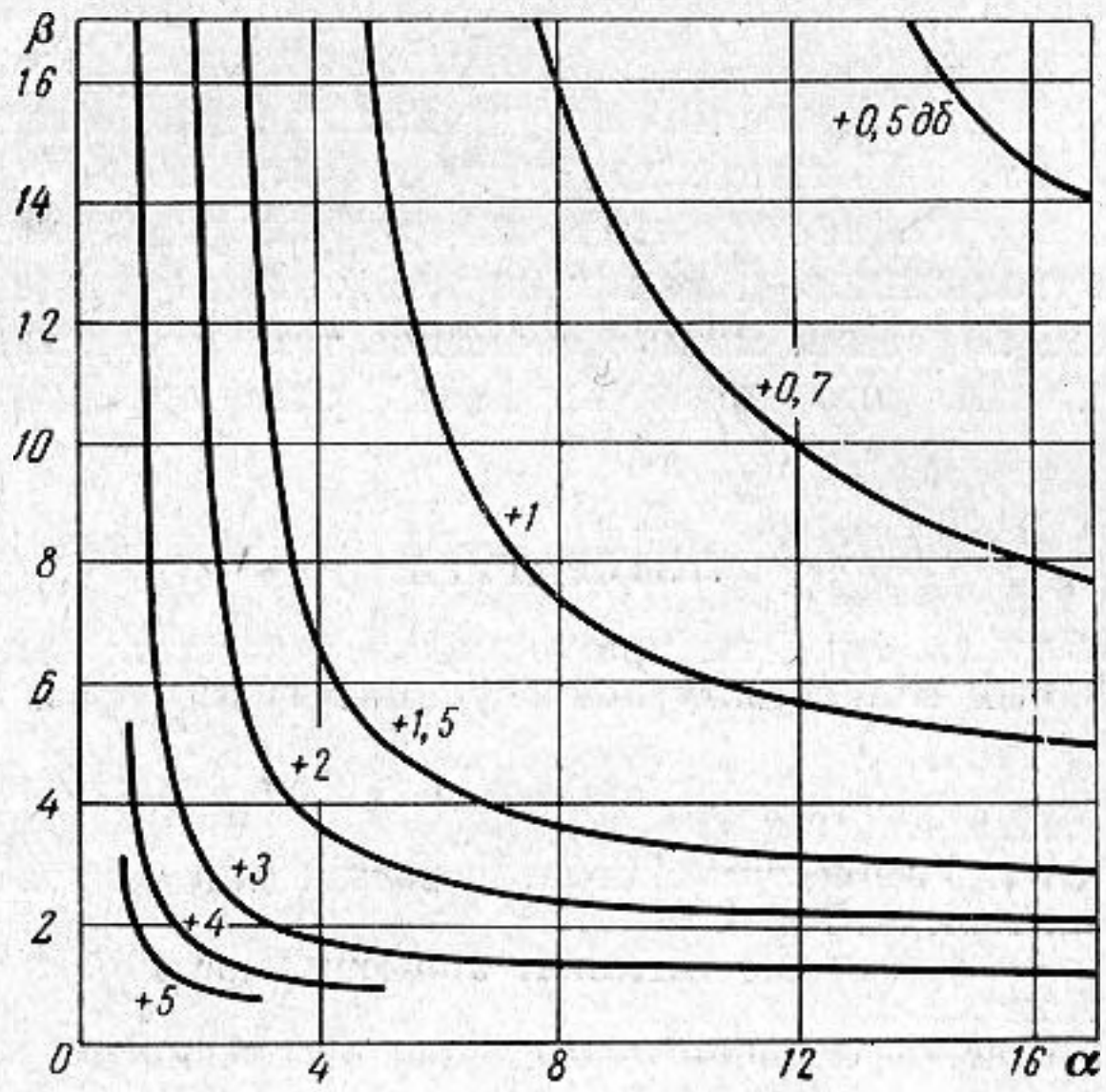
$$K_{max} = 4\varphi_{max}(\alpha)\cdot\varphi_{max}(\beta) \text{ и } K_{min} = 4\varphi_{min}(\alpha)\cdot\varphi_{min}(\beta).$$

Таким способом построены графики, дающие возможные наибольшие отклонения от геометрической акустики для рассматриваемого случая прямоугольной отражающей области S. На фиг. 5 дан график наибольших положительных отклонений, а на фиг. 6 — наибольших (по абсолютной величине) отрицательных отклонений. По осям координат этих графиков отложены параметры α и β, а цифры на кривых дают коэффициенты отклонения от геометрической акустики, выраженные в децибелах (т. е. $10 \lg K_{max}$ на фиг. 5 и $10 \lg K_{min}$ на фиг. 6).

Возьмем для примера отражающую область по фиг. 3 со сторонами $2a = 4$ *м* и $2b = 3$ *м*. Пусть $R_0 = 10$ *м*, $R = 6$ *м*, $\lambda = 0{,}8$ *м* и $\delta = 35°$. Из (12) получим $\alpha = 1{,}54$ и $\beta = 1{,}41$ и из фиг. 5 и 6 находим пределы отклонения от геометрической акустики $+4{,}5$ и $-5{,}8$ *дб*.

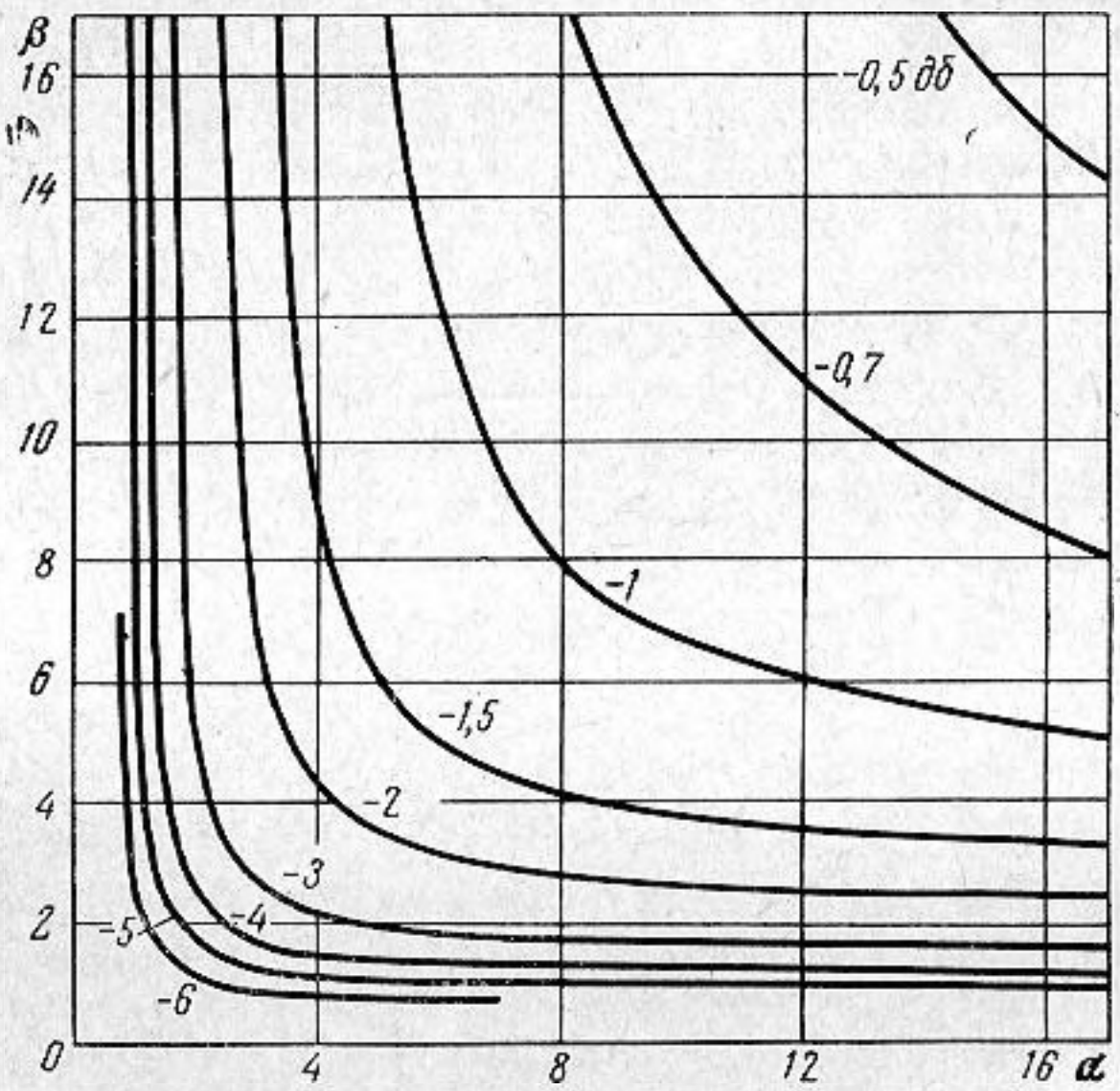
Если в частном случае областью S является прямоугольник со сторонами $2b/\cos\delta$ и $2b$, показанный пунктиром на фиг. 2, то $\alpha = \beta$ и $K = 4[\varphi(\alpha)]^2$. В этом прямоугольнике и показанном на этой же фигуре эллипсе помещается одно и то же число полных зон Френеля, но резуль-

таты получаются разные — у прямоугольника с увеличением числа зон коэффициент отклонения от геометрической акустики K стремится к единице, а у эллипса такого специального очертания он, как видно из форму-



Фиг. 5

лы (8), колеблется в постоянных пределах. Это подтверждает отмеченную выше неправильность оценки отклонений от геометрической акустики при помощи зон Френеля.



Фиг. 6

В тех случаях, когда плоская отражающая область S имеет произвольное очертание, ее можно приближенно разбить на прямоугольники и тогда в соответствии с формулами (3) и (6) коэффициент отклонения от геометрической акустики будет

$$K = \frac{(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots)^2 + (N_1 + N_2 + N_3 + \ldots)^2}{4}$$

где $M_1, M_2, \ldots, N_1, N_2, \ldots$ рассчитываются по формулам (9) для отдельных прямоугольников. При этом, разумеется, исключается случай специального эллиптического очертания области S по фиг. 2. При заданном расположении области S, источника и точки приема, K сильно колеблется в зависимости от длины волны λ. Для практических расчетов важны пределы этих колебаний, которые можно установить, взяв несколько соседних значений длины волны вблизи заданного значения. Если ограничиться таким выяснением пределов, то достаточно грубого разбиения области S на несколько прямоугольников. Для примерной оценки пределов отклонения от геометрической акустики можно обойтись тем, что, вписав в область S один прямоугольник по фиг. 3, взять эти пределы из графиков фиг. 5 и 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Пределы применимости некоторых приближенных методов, употребляемых в архитектурной акустике. Успехи физ. наук, 1947, **32**, 4, 463—476.
2. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн. М., Гостехиздат, 1953, ч. 1.
3. Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., Изд-во АН СССР, 1961, гл. I и II.
4. R. D. Spence. A note on the Kirchhoff approximation in the diffraction theory. J. Acoust. Soc. America, 1949, **21**, 2, 98—100.
5. A. Leitner. Diffraction of sound by a circular disk. J. Acoust. Soc. America, 1949, **21**, 4, 331—334.
6. A. Schoch. Schallreflexion, Schallbrechung und Schallbeugung. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Berlin, 1950, **23**, 127—234, § 37.
7. J. W. M. Baars. On the diffraction of sound waves by a circular disk. Acustica, 1964, **14**, 5, 289—296.
8. А. Зоммерфельд. Оптика. М., ИЛ, 1953, § 34.
9. М. Борн. Оптика. Харьков, ОНТИ Украины, 1937, §§ 45, 46, 55. Новое переработанное издание: M. Born, E. Wolf. Principles of optics, London, 1959.
10. G. Joos. Lehrbuch der theoretischen Physik. 10. Aufl., Leipzig, 1959, K. X., § 1.

Н.-и. институт строительной физики
Москва

Поступила в редакцию
7 сентября 1964 г.