

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ВРЕМЕННОГО ЗАТУХАНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский

Монохроматическая волна в волноводе, ориентированном вдоль оси x , имеет вид $\Phi = \Phi(y, z) e^{i(\omega t - kx)}$, причем дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω с волновым числом k , можно записать в форме

$$F(\omega, k, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где λ — параметр, характеризующий упругие свойства волновода. В среде с поглощением λ комплексно: $\lambda = \lambda' - i\lambda''$; соответственно $k = k' - ik''$, $\omega = \omega' + i\delta$. Пусть потери малы: $\lambda'' \ll \lambda'$. Предполагая k постоянным, можно получить из уравнения (1), придавая λ приращение $i\lambda''$, следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{k'} = + \frac{1}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \lambda''. \quad (2)$$

Если зафиксировать в (1) величину ω , то получим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial k} \right)_{\omega'} = - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \lambda''. \quad (3)$$

Физически первый случай соответствует затуханию во времени по закону $\sim e^{-\delta t}$ волны, имеющей пространственное распределение $\sim e^{-ik''x}$. Вторым случаем можно реализовать, поместив в некоторую точку волновода монохроматический источник с частотой ω ; его поле будет затухать с расстоянием по закону $\sim e^{-\kappa x}$.

С другой стороны, предполагая $\lambda = \text{const}$, из условия $dF(\omega, k) = 0$ (при $\lambda = \text{const}$) получим

$$\frac{\partial F / \partial k}{\partial F / \partial \omega} = - \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) находим соотношение между коэффициентом временного затухания δ и коэффициентом пространственного затухания κ

$$\frac{\delta}{\kappa} = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (5)$$

Производная $\partial \omega / \partial k$ — как известно, групповая скорость, равная для волновода без потерь скорости переноса энергии. Для волновода с потерями скорость переноса энергии отлична от $\partial \omega / \partial k$, однако это отличие при малых потерях несущественно. Соотношение (5) может оказаться полезным при анализе распространения сигналов в волноводах (и, вообще говоря, в структурах) с поглощением. Например, для одномерной цепочки связанных осцилляторов дисперсионное уравнение (1) имеет, как известно, вид

$$\omega = \frac{2c_\infty}{d} \left| \sin \frac{kd}{2} \right|, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{kd}{2} < \frac{\pi}{2},$$

где $c_\infty = d\sqrt{B/md}$, B — жесткость упругого элемента, m — масса инерциального элемента осциллятора, d — расстояние между осцилляторами. Для этого случая $\delta/\kappa = c_\infty \cos(kd/2)$, где временное затухание $\delta = c''/c'$ ($c_\infty = c' + ic''$).

Видно, что если $kd/2 \rightarrow \pi/2$, то коэффициент пространственного затухания κ стремится к бесконечности при любом конечном временном коэффициенте потерь δ .

Таким образом, используя соотношение (5), можно определить пространственное затухание в волноводе, если известны дисперсия групповой скорости и временное затухание. Наоборот, найдя (например, экспериментально) частотную характеристику пространственного затухания, можно определить дисперсию групповой и затем фазовой скорости. Практическая значимость найденного соотношения заключается еще и в том, что оно позволяет сопоставить полученные экспериментально независимым путем различные характеристики волновода: временное затухание $\delta(\omega)$, пространственное затухание $\kappa(\omega)$ и групповую скорость $c_{гр}(\omega)$. Для этого формулу (5) удобно переписать так: $(\kappa(\omega) / \delta(\omega)) c_{гр} = 1$, что и будет критерием достоверности полученных экспериментальных результатов.