АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 2

УДК 534.286

О ЗАТУХАНИИ УПРУГИХ ИМПУЛЬСОВ

П. В. Пономарев

Рассматривается уменьшение энергии экспоненциальных импульсов при распространении их в средах, обладающих коэффициентом поглощения, пропорциональным квадрату частоты или первой степени частоты. Определяется также плотность энергии, поглощенной в материале.

В жидкостях и газах коэффициент поглощения звука пропорционален квадрату частоты; во многих твердых телах он линейно связан с частотой. Зависимость коэффициента поглощения от частоты приводит к тому, что при распространении негармонических волн спектральные составляющие импульса затухают неодинаково, и его форма при распространении волны изменяется [1]; изменяется и соотношение между энергией импульса и поглощенной энергией в данной точке. Экспоненциальная зависимость уменьшения энергии волны нарушается.

Найдем, как уменьшается энергия плоской волны, давление в которой изменяется по закону:

$$p = p_0 \exp\left[-\beta_1\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] - p_0 \exp\left[-\beta_2\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]. \tag{1}$$

Используя теорему Рейли о спектральной плотности энергии [2] и учитывая, что запаздывание во времени на $t_1 = x/c$ не изменяет спектральной плотности, мы получим при линейной зависимости коэффициента поглощения от частоты следующее выражение для энергии импульса, отнесенной к единице поверхности волнового фронта:

$$W(x) = \int_0^\infty pv\,dt = \frac{p_0^2(\beta_1-\beta_2)^2}{\pi\rho c}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_0 x\omega}\,d\omega}{\omega^4+\omega^2(\beta_1^2+\beta_2^2)+\beta_1^2\beta_2^2}$$

Разлагая подынтегральное выражение на простые дроби, мы придем к табличному интегралу [3] и получим окончательно

$$W(x) = \frac{p_0^2}{2\rho c}\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2+\beta_1}\left[\frac{1}{\beta_1}\mathrm{M}_0(\xi_1) - \frac{1}{\beta_2}\mathrm{M}_0(\xi_2)\right]. \tag{2}$$

Здесь $\mathrm{M}_0(\xi) = 2/\pi(\mathrm{ci}\,\xi\cdot\sin\xi - \mathrm{si}\,\xi\cdot\cos\xi)$ — функция от аргумента $\xi_1 = \beta_1\alpha_0 x$ или $\xi_2 = \beta_2\alpha_0 x$, $\mathrm{si}\,\xi$, $\mathrm{ci}\,\xi$ — интегральные синус и косинус, $\alpha_0 = 2\alpha/\omega$ — коэффициент поглощения.

Проведя аналогичный расчет, мы получим энергию импульса при квадратичной зависимости коэффициента поглощения от частоты:

$$W(x) = \frac{p_0^2}{2\rho c}\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_2+\beta_1}\left[\frac{1}{\beta_1}\Pi_0(\xi_1) - \frac{1}{\beta_2}\Pi_0(\xi_2)\right]. \tag{3}$$

Здесь $\Pi_0(\xi) = [1 - \Phi(\xi)]e^{\xi^2}$ — функция аргумента $\xi_1 = \beta_1 \cdot \sqrt{\alpha_0 \cdot x}$ или $\xi_2 = \beta_2 \sqrt{\alpha_0 x}$, $\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0 e^{-t^2} \cdot dt$ — интеграл вероятности.

При $\xi = x = 0$ функции $M_0(\xi)$, $\Pi_0(\xi)$ обращаются в единицу: $M_0(0) = \Pi_0(0) = 1$ и энергия импульсов (2) и (3) будет равна работе, совершаемой излучателем

$$W_0 = \frac{p_0^2}{\rho c} \frac{(\beta_2 - \beta_1)^2}{2\beta_1\beta_2(\beta_2 + \beta_1)}.$$

В частном случае $\beta_2 = \infty$, импульс (1) превращается в обычную экспоненту, а выражения (2) и (3) принимают вид

$$W(x) = \frac{p_0^2}{2\rho c\beta_1} M_0(\xi),$$

$$W(x) = \frac{p_0^2}{2\rho c\beta_1} \Pi_0(\xi).$$

Найдем теперь закон спадания энергии импульса для сферической волны. Импульс давления представим также в виде разности двух экспонент:

$$p = \frac{p_1}{r} \exp\left[-\beta_1\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{p_2}{r} \exp\left[-\beta_2\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]. \quad (4)$$

Известно [4], что импульс давления в сферической волне должен удовлетворять условию $\int\limits_0^\infty p(t) \cdot dt = 0$, что в данном случае эквивалентно равенству $p_1 / \beta_1 = p_2 / \beta_2$. Форма импульса колебательной скорости для волны (4) находится из уравнения движения

$$v = \frac{p_1}{\rho r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\beta_1}{c}\right) e^{-\beta_1(t-r/c)} - \frac{p_2}{\rho r}\left(\frac{1}{r} - \frac{\beta_2}{c}\right) e^{-\beta_2(t-r/c)}.$$

Используя общую теорему для спектральной плотности энергии [2], определим значение энергии волны на расстоянии r_1 от поверхности излучателя при линейной зависимости коэффициента поглощения от частоты

$$W(r) = \frac{p_1^2(\beta_1 - \beta_2)}{2\rho c r^2(\beta_1 + \beta_2)\beta_1^2} [\beta_1 M_0(\xi_1) - \beta_2 M_0(\xi_2)],$$

где $\xi_1 = \beta_1\alpha_0 r_1$, $\xi_2 = \beta_2\alpha_0 r_1$. Для квадратичной зависимости коэффициента поглощения от частоты энергия будет

$$W(r) = \frac{p_1^2(\beta_1 - \beta_2)}{2\rho c r^2(\beta_1 + \beta_2)\beta_1^2} [\beta_1 \Pi_0(\xi_1) - \beta_2 \Pi_0(\xi_2)].$$

Часто требуется знать величину энергии, поглощенной в единице объема. В частности, эта величина в случае больших избыточных давлений определяет усталостные изменения в материале. Плотность поглощенной энергии легко определяется дифференцированием энергии импульса по координате. Для плоской волны она

$$w(x) = -\frac{p_0^2\alpha_0}{2\rho c} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} [M_1(\xi_1) - M_1(\xi_2)]. \quad (5)$$

Для квадратичной зависимости

$$w(x) = -\frac{p_0^2\alpha_0}{2\rho c} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} [\beta_1\Pi_1(\xi_1) - \beta_2\Pi_1(\xi_2)]. \quad (6)$$

Здесь

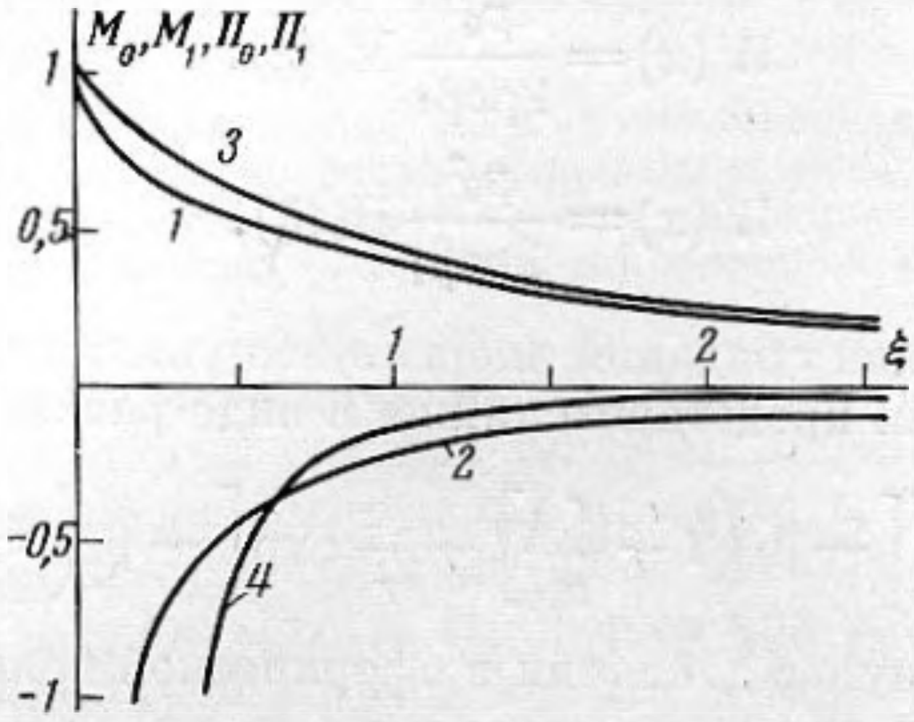
$$\mathrm{M}_1(\xi)=\frac{2}{\pi}\,(si\xi\cdot\sin\xi+ci\xi\cos\xi),\qquad \Pi_1(\xi)=[1-\Phi(\xi)]\,e^{\xi^2}-\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}.$$

Для частного случая $\beta_2=\infty$ выражения (5) и (6) принимают вид

$$w(x)=-\frac{p_0{}^2\alpha_0}{2\rho c}\,\mathrm{M}_1(\xi), \tag{7}$$

$$w(x)=-\frac{p_0{}^2\alpha_0}{2\rho c}\,\beta_1\Pi_1(\xi). \tag{8}$$

Плотность поглощенной энергии, определяемая выражениями (6), (7) и (8) для $X=0$, обращается в бесконечность, что соответствует поглоще-



нию самых высокочастотных гармоник импульса в тонком поверхностном слое материала.

Плотность поглощенной энергии в сферической волне для линейной зависимости от частоты оказывается равной

$$w(r)=-\frac{p_1{}^2\alpha_0(\beta_1-\beta_2)}{2\rho cr^2(\beta_1+\beta_2)}\,[\beta_1{}^2\mathrm{M}_1(\xi_1)-\beta_2{}^2\mathrm{M}_1(\xi_2)].$$

Для квадратичной зависимости она будет

$$w(r)=-\frac{p_1{}^2(\beta_1-\beta_2)\,\alpha_0}{2\rho cr^2\beta_1{}^2(\beta_1+\beta_2)}\,[\beta_1{}^3\Pi_1(\xi_1)-\beta_2{}^3\Pi_1(\xi_2)].$$

Графики введенных функций представлены на фигуре, где $1-\mathrm{M}_0(\xi)$, $2-\mathrm{M}_1(\xi)$, $3-\Pi_0(\xi)$, $4-\Pi_1(\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Ф. Горшков. О распространении импульсов в упругой среде. Акуст. ж., 1957, 3, 2, 154—162.
2. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962, стр. 23.
3. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963, стр. 326—352.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1954, стр. 329.

Кузбасский политехнический институт
г. Кемерово

Поступила в редакцию
13 декабря 1965 г.