АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII 1967 Вып. 3

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. Е. Глазанов

Теории дифракции акустических и в особенности электромагнитных волн на решетках посвящено большое число работ. Однако в большинстве из них, начиная с работы Лэмба [1], решается задача о дифракции на решетках с радиусом цилиндров, малым по сравнению с длиной волны. Для плоских решеток имеется ряд точных решений при произвольном соотношении периода решетки с длиной волны (см. например, [2, 3] и другие работы). Одним из методов, позволяющих решить задачу при произвольных размерах симметричной цилиндрической решетки, является рассмотрение одиночного цилиндра, расположенного в центре волновода с абсолютно жесткими стенками. Однако этот способ пригоден лишь для случая нормального падения волны на решетку [4]. Использование теоремы сложения цилиндрических функций [5] позволяет избавиться от введения вспомогательного волновода и непосредственно решить задачу при произвольном угле падения [6].

Для решетки в изотропной упругой среде задача значительно усложняется вследствие наличия в среде, по крайней мере, двух типов волн — продольной и поперечной. Вопросы дифракции на одиночных полостях в упругой среде исследовались в работах [7, 8]. Было отмечено наличие резонанса, который для сферической полости наступает при $k_t a = 2$ [7], а для бесконечной цилиндрической полости — при $0 < k_t a \leqslant 2$ [8], где k_t — волновое число для сдвиговых волн, a — радиус полости. Особенно сильное рассеяние на полостях наблюдается в резиноподобной среде, когда резонанс полости обусловлен малостью модуля сдвига μ по сравнению с λ, где λ — постоянная Ламе, которая для резины соответствует объемному модулю упругости.

Насколько нам известно, задача о дифракции на решетке из цилиндрических полостей в упругой среде до настоящего времени не была решена. Ниже приводится точное решение этой задачи.

Пусть в изотропной упругой среде на решетку, составленную из N бесконечных цилиндрических полостей радиуса a, отстоящих друг от друга на расстоянии b, под углом θ к плоскости решетки падает плоская продольная волна (фиг. 1), описываемая скалярным потенциалом

$$\varphi_1 = \Phi_0 e^{ik_l(x\cos\theta + y\sin\theta)}. \tag{1}$$

Смещение точек среды в рассеянной волне, как известно [9], можно представить в виде суммы

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{\Pi},$$

где φ — скалярный потенциал, соответствующий продольным волнам, $\mathbf{\Pi}$ — векторный потенциал, соответствующий поперечным (сдвиговым) волнам, причем величины φ и $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяют волновым уравнениям

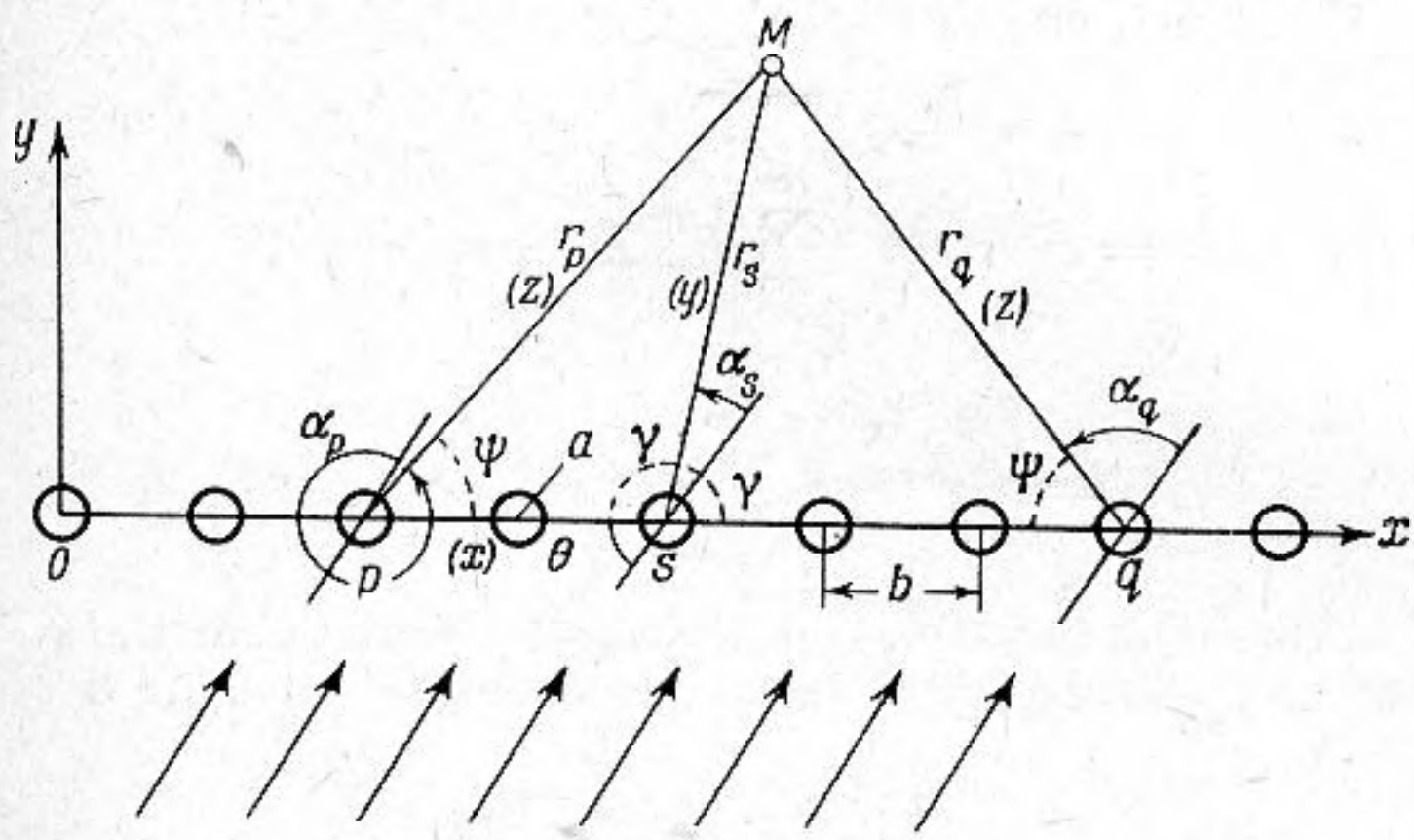
$$\Delta\varphi + k_l^2\varphi = 0 \quad \text{и} \quad -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + k_t^2\mathbf{\Pi} = 0.$$

Здесь $k_l = (\rho\omega^2 / \lambda + 2\mu)^{1/2}$ — волновое число для продольных волн, $k_t = (\rho\omega^2 / \mu)^{1/2}$; ρ — плотность среды, ω — круговая частота.

Выразив падающую волну в любой точке M пространства через координаты цилиндра с номером S, получим (приняв $\Phi_0 = 1$)

$$\varphi_1 = e^{ik_l bs\cos\theta + ik_l r_s \cos\alpha_s} = e^{ik_l bs\cos\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_l r_s) e^{in\alpha_s}. \tag{2}$$

Здесь и далее J_n — функция Бесселя, $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода (зависимость от времени взята в форме $e^{-i\omega t}$). В дальнейшем индекс 1 для простоты записи опускаем. Смысл величин r_s и α_s ясен из фиг. 1.



Фиг. 1

Рассмотрим цилиндр с номером S. Этот цилиндр облучается падающей плоской волной φ_1 и волнами, рассеянными всеми остальными цилиндрами. Если обозначить волну, рассеянную цилиндром S (в присутствии остальных цилиндров) через φ_s и $\mathbf{\Pi}_s$, то потенциалы на поверхности цилиндра будут

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_s + \sum_{p=1}^{s-1} \varphi_p + \sum_{q=s+1}^{N} \varphi_q, \tag{3}$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_s + \sum_{p=1}^{s-1} \mathbf{\Pi}_p + \sum_{q=s+1}^{N} \mathbf{\Pi}_q. \tag{4}$$

Поле в точке М, рассеянное всей решеткой, определяется выражениями:

$$\varphi_{\text{м}} = \sum_{s=1}^{N} \varphi_s; \quad \mathbf{\Pi}_{\text{м}} = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{\Pi}_s,$$

а полное поле

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_1 + \varphi_{\text{м}}; \quad \mathbf{\Pi}_{\text{полн}} = \mathbf{\Pi}_{\text{м}}.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\varphi_s = e^{ik_l bs\cos\theta} \sum_{n=-\infty} A_n^{(s)} H_n(k_l r_s) e^{in\alpha_s}, \tag{5}$$

$$\Pi_{zs} = \Pi_s = e^{ik_t bs\cos\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(s)} H_n(k_t r_s) e^{in\alpha_s}. \tag{6}$$

Решение для векторного потенциала в силу того, что фронт волны параллелен осям полостей, будет содержать только z-составляющую. Множители $e^{ikbs\cos\theta}$ введены в связи с тем, что волна, рассеянная на цилиндре с номером S, сдвинута по фазе на угол $k_l bs\cos\theta$ ($k_t bs\cos\theta$) по отношению к началу отсчета. Аналогично выразим потенциалы, рассеянные остальными цилиндрами:

$$\varphi_p = e^{ik_l bp\cos\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(p)} H_n(k_l r_p)\, e^{in\alpha_p}, \tag{7}$$

$$\varphi_q = e^{ik_l q\cos\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(q)} H_n(k_l r_q)\, e^{in\alpha_q}, \tag{8}$$

$$\Pi_r = e^{ik_t bp\cos\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(p)} H_n(k_t r_p)\, e^{in\alpha_p}, \tag{9}$$

$$\Pi_q = e^{ik_t bq\cos\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(q)} H_n(k_t r_q)\, e^{in\alpha_q}. \tag{10}$$

В выражениях для скалярных и векторных потенциалов $A_n^{(\ )}$ и $B_n^{(\ )}$ — неизвестные постоянные, которые могут быть определены из граничных условий

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \tau_{r\alpha} = 0 \tag{11}$$

при $r = a$, где σ_{rr} и $\tau_{r\alpha}$, соответственно, нормальное и тангенциальное напряжения в среде, которые известным образом [9] выражаются через векторный и скалярный потенциалы:

$$\sigma_{rr} = -\lambda k_l^2\varphi + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\partial\alpha} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\right), \tag{12}$$

$$\tau_{r\alpha} = 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\alpha} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) - 2\mu\left(\frac{k_t^2}{2}\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2}\right). \tag{13}$$

Для того чтобы решить задачу, необходимо написать выражения (7), (8), (9) и (10) в цилиндрической системе координат. Ось последней должна совпадать с осью цилиндра номера S. Переход от одной цилиндрической системы координат к другой можно осуществить, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций [5] (см. фиг. 1)

$$Z_n(z)\, e^{in\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{m+n}(x)\, J_n(y)\, e^{im\nu} \tag{14}$$

при условии $y \leqslant x$, где Z_n — цилиндрическая функция. С учетом соотношения (14) в системе координат, совпадающей с цилиндром S потенциалы φ_p и φ_q примут вид

$$\varphi_p = e^{ik_l bp\cos\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_m^{(p)} H_{m-n}[k_l b(p-s)]\, J_n(k_l r_s)\, e^{i[n\alpha_s + \theta(n-m)]}, \tag{15}$$

$$\varphi_q = e^{ik_l bq\cos\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_m^{(q)} H_{n-m}[k_l b(q-s)]\, J_n(k_l r_s)\, e^{i[n\alpha_s + \theta(n-m)]}. \tag{16}$$

После подстановки выражений (1), (5), (15) и (16) в формулу (3), мы

получаем следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi = e^{ik_l bs\cos\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_l r_s) e^{in\alpha_s} [i^n + A_n^{(s)} C_n(k_l r_s) + F_n], \tag{17}$$

где

$$C_n(k_l r_s) = \frac{H_n(k_l r_s)}{J_n(k_l r_s)};$$

$$F_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\theta(n-m)} \Bigg[\sum_{p=1}^{s-1} A_m^{(p)} H_{m-n}[k_l b(p-s)] e^{ik_l b(p-s)\cos\theta} +$$

$$+ \sum_{q=s+1}^{N} A_m^{(q)} H_{m-n}[k_l b(q-s)] e^{ik_l b(q-s)\cos\theta} \Bigg].$$

Аналогичным образом получается выражение для векторного потенциала:

$$\Pi = e^{ik_t bs\cos\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_t r_s) e^{in\alpha_s} [B_n^{(s)} G_n(k_t r_s) + D_n], \tag{18}$$

где

$$G_n(k_t r_s) = \frac{H_n(k_t r_s)}{J_n(k_t r_s)};$$

$$D_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\theta(n-m)} \Bigg[\sum_{p=1}^{s-1} B_m^{(p)} H_{m-n}[k_t b(p-s)] e^{ik_t b(p-s)\cos\theta} +$$

$$+ \sum_{q=s+1}^{N} B_m^{(q)} H_{m-n}[k_t b(q-s)] e^{ik_t b(q-s)\cos\theta} \Bigg].$$

Подставляя выражения (17) и (18) в граничные условия (11), получаем бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_n^{(\ )}$ и $B_n^{(\ )}$.

Значительно более простая система получается, если решетка бесконечная, т. е. когда $N \to \infty$. Тогда, очевидно, волны номера n, рассеянные каждым цилиндром, будут отличаться друг от друга лишь фазовыми множителями, коэффициенты A_n и B_n не будут зависеть от номера цилиндра, и количество уравнений уменьшится. Выражения для скалярного и векторного потенциалов в этом случае примут вид

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_l r)[i^n + A_n G_n(k_l r) + F_n] e^{in\alpha}, \tag{19}$$

$$\Pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_t r)[B_n G_n(k_t r) + D_n] e^{in\alpha}, \tag{20}$$

где

$$F_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_l bp) e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_l bp\cos\theta} + e^{ik_l bp\cos\theta}];$$

$$D_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_t bp) e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_t bp\cos\theta} + e^{ik_t bp\cos\theta}];$$

$$C_n(k_l r) = \frac{H_n(k_l r)}{J_n(k_l r)}, \quad G_n(k_t r) = \frac{H_n(k_t r)}{J_n(k_t r)}.$$

Подставляя выражения (19) и (20) в формулу (11), получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \frac{u_{nm}^{(1)}}{b_n^{(1)}} + A_n \frac{a_n^{(1)}}{b_n^{(1)}}\right) + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \frac{v_{nm}^{(1)}}{b_n^{(1)}} + B_n\right) = \frac{X_n^{(1)}}{b_n^{(1)}},$$

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \frac{u_{nm}^{(2)}}{a_n^{(2)}} + A_n\right) + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \frac{v_{nm}^{(2)}}{a_n^{(2)}} + B_n \frac{b_n^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right) = \frac{X_n^{(2)}}{a_n^{(2)}} \tag{21}$$

$$(n = -\infty \ldots +\infty),$$

где

$$u_{nm}^{(1)} = \left[k_l^2 J_n''(k_l a) - \frac{k_t^2}{2} J_n(k_l a)\right] \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_l bp)\, e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_l bp\cos\theta} + e^{ik_l bp\cos\theta}];$$

$$v_{nm}^{(1)} = \frac{1}{a}\left[k_t J_n'(k_t a) - \frac{i}{a} J_n(k_t a)\cdot n\right] \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_t bp)\, e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_t bp\cos\theta} + e^{ik_t bp\cos\theta}];$$

$$X_n^{(1)} = -i^n \left[k_l^2 J_n''(k_l a) - \frac{k_t^2}{2} J_n(k_l a)\right];$$

$$a_n^{(1)} = k_l^2 H_n''(k_l a) - \frac{k_t^2}{2} H_n(k_l a);$$

$$b_n^{(1)} = \frac{1}{a}\left[k_t H_n'(k_t a) - \frac{in}{a} H_n(k_t a)\right];$$

$$u_{nm}^{(2)} = \left[\frac{1}{a} J_n(k_l a) - k_l J_n'(k_l a)\right] \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_l bp)\, e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_l bp\cos\theta} + e^{ik_l bp\cos\theta}];$$

$$v_{nm}^{(2)} = -\frac{iak_t^2}{n}\left[\frac{J_n(k_t a)}{2} + J_n''(k_t a)\right] \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} H_{n-m}(k_t bp)\, e^{i\theta(n-m)} [(-1)^{m-n} e^{-ik_t bp\cos\theta} + e^{ik_t bp\cos\theta}];$$

$$X_n^{(2)} = -i^n \left[\frac{1}{a} J_n(k_l a) - k_l J_n'(k_l a)\right];$$

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{a} H_n(k_l a) - k_l H_n'(k_l a);$$

$$b_n^{(2)} = -\frac{iak_t^2}{n}\left[\frac{H_n(k_t a)}{2} + H_n''(k_t a)\right].$$

Зная постоянные A_n и B_n, определяемые из бесконечной системы уравнений (21), можно рассчитать коэффициент прохождения упругой волны через решетку t.

Известно, что при прохождении волны через решетку возникают пространственные дифракционные спектры нулевого и высших порядков. Вычислим коэффициент прохождения t для нулевого спектра. При этом появляется возможность определить t следующим простым способом. По аналогии с работой [6], заменим бесконечную решетку ограниченной, составленной из $2N+1$ цилиндрических полостей ($N \gg 1$), и поместим ее в абсолютно жесткий экран $y=0$ со щелью $x=\pm(2N+1)b/2$. Тогда коэффициент прохождения через решетку можно определить как

$$t = 1 + \frac{\sigma_{rr}^{(p)}}{\sigma_{rr}^{(n)}}, \tag{22}$$

где $\sigma_{rr}^{(n)}$ — нормальная к фронту волны составляющая напряжения, создаваемого прошедшей через отверстие в экране волной в точке М при отсутствии решетки; $\sigma_{rr}^{(p)} = -\lambda k_l^2 \varphi_{\text{м}}^{(p)}$ — нормальная к фронту волны составляющая напряжения, создаваемого рассеянной решеткой волной в точке М. При этом необходимо, чтобы выполнялось условие $k_l r_s \gg N k_l b$, где r_s — расстояние до точки М (см. фиг. 1). С учетом (12) выражение (22) можно написать в виде

$$t = 1 + \frac{\varphi_{\text{м}}^{(p)}}{\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})}} - \frac{2}{k_t^2} \cdot \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi_{\text{м}}^{(p)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \Pi_{\text{м}}^{(p)}}{\partial r\, \partial \alpha} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \Pi_{\text{м}}^{(p)}}{\partial \alpha}}{\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})}}, \tag{23}$$

где $\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})}, \varphi_{\text{м}}^{(\text{р})}$ и $\Pi_{\text{м}}^{(\text{р})}$ — скалярные и векторный потенциалы в падающей и рассеянной волне.

Для определения t вычислим эти величины. При отсутствии решетки скалярный потенциал волны, прошедшей через отверстие в экране будет в точке М

$$\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(s)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \cdot \frac{e^{ik_l r}}{r}\, dS, \tag{24}$$

где φ_1 — потенциал волны в раскрыве экрана.

Определяя φ_1 по формуле (1), учитывая соотношение, известное из работы [10]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_l \sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}}\, dz = i\pi H_0[k_l \sqrt{(x-x_1)^2+y^2}] =$$

$$= i\pi H_0[k_l(r - x\cos\theta)],$$

и замечая, что в нашем случае

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

мы получаем для потенциала в дальнем поле с учетом асимптотического разложения функции Ханкеля [10] выражение:

$$\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})} = \frac{k_l \sin\theta}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{i(k_l r - \pi/4)} \cdot bN. \tag{25}$$

Представляя скалярный потенциал в волне, рассеянной решеткой, в виде

$$\varphi_{\text{м}}^{(\text{р})} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(k_l r_s)\, e^{in\alpha_s}$$

и учитывая, что

$$r_s = r + b_s\,[\cos\theta + \cos(\alpha+\theta)],$$

$$H_{\pm n}(k_l r_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{i\{k_l r + k_l b s[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)] \mp (\pi/2)n - (\pi/4)\}},$$

$$\sum_{s=1}^{N} e^{ik_l bs[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]} = \frac{\sin\left\{\frac{Nk_l b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}}{\sin\left\{\frac{k_l b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}},$$

получаем

$$\varphi_{\text{м}}^{(\text{р})} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_l r}}\, e^{i(k_l r - \pi/4)} \cdot \frac{\sin\left\{\frac{Nk_l b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}}{\sin\left\{\frac{k_l b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n e^{in\alpha}. \tag{26}$$

Аналогично выглядит выражение для векторного потенциала в рассеянной волне:

$$\Pi_{\text{м}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_t r}}\, e^{i(k_t r - \pi/4)} \cdot \frac{\sin\left\{\frac{Nk_t b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}}{\sin\left\{\frac{k_l b}{2}[\cos\theta - \cos(\alpha+\theta)]\right\}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n B_n e^{in\alpha}. \tag{27}$$

Подставляя выражения (25), (26) и (27) в формулу (23) и принимая $\alpha = 0$, можно рассчитать коэффициент прохождения для решетки в изотропной упругой среде с любым коэффициентом Пуассона.

Остановимся подробнее на анализе поведения решетки в резиноподобной среде. Поскольку для такой среды $\mu \ll \lambda$, вдали от решетки можно пренебречь сдвиговыми деформациями, которые концентрируются в основном вокруг полостей. Следовательно, в формуле (23) можно положить $\Pi_{\text{м}}^{(\text{р})} = 0$. Кроме того, анализ выражения (23) показывает, что для резиноподобной среды выполняется неравенство

$$\frac{2}{k_t^2} \cdot \frac{\frac{\partial^2 \varphi_{\text{м}}^{(\text{р})}}{\partial r^2}}{\varphi_{\text{м}}^{(\text{р})}} \ll 1 + \frac{\varphi_{\text{м}}^{(\text{р})}}{\varphi_{\text{м}}^{(\text{п})}}.$$

В силу этого неравенства коэффициент прохождения для решетки в резиноподобной среде может быть написан в следующем виде:

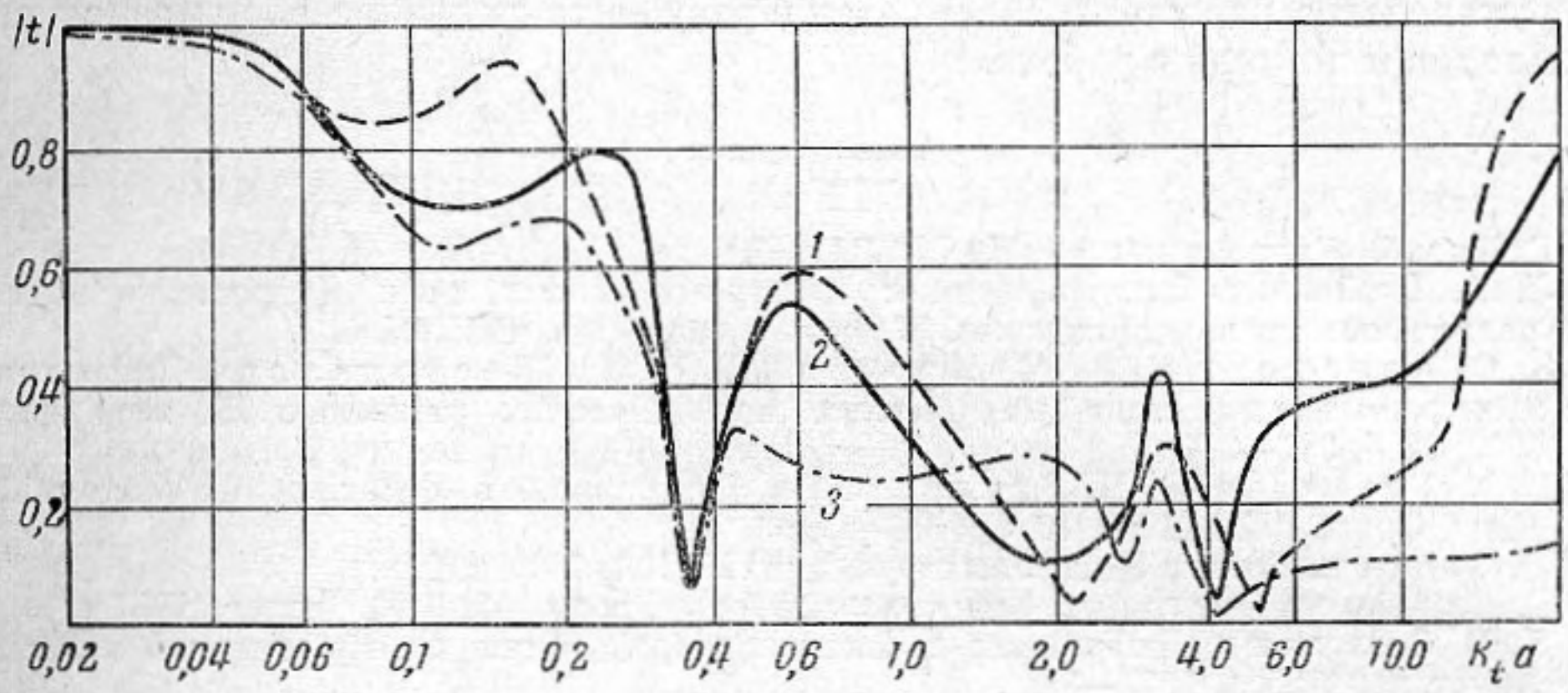
$$t = 1 + \frac{2}{k_l b \sin\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i) A_n. \tag{28}$$

Решение бесконечной системы уравнений (21) и расчет коэффициента прохождения t по формуле (28) для решетки в среде с коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}4975$ ($\lambda / \mu = 200$) были произведены на быстродействующей вычислительной машине БЭСМ-2 *.

---

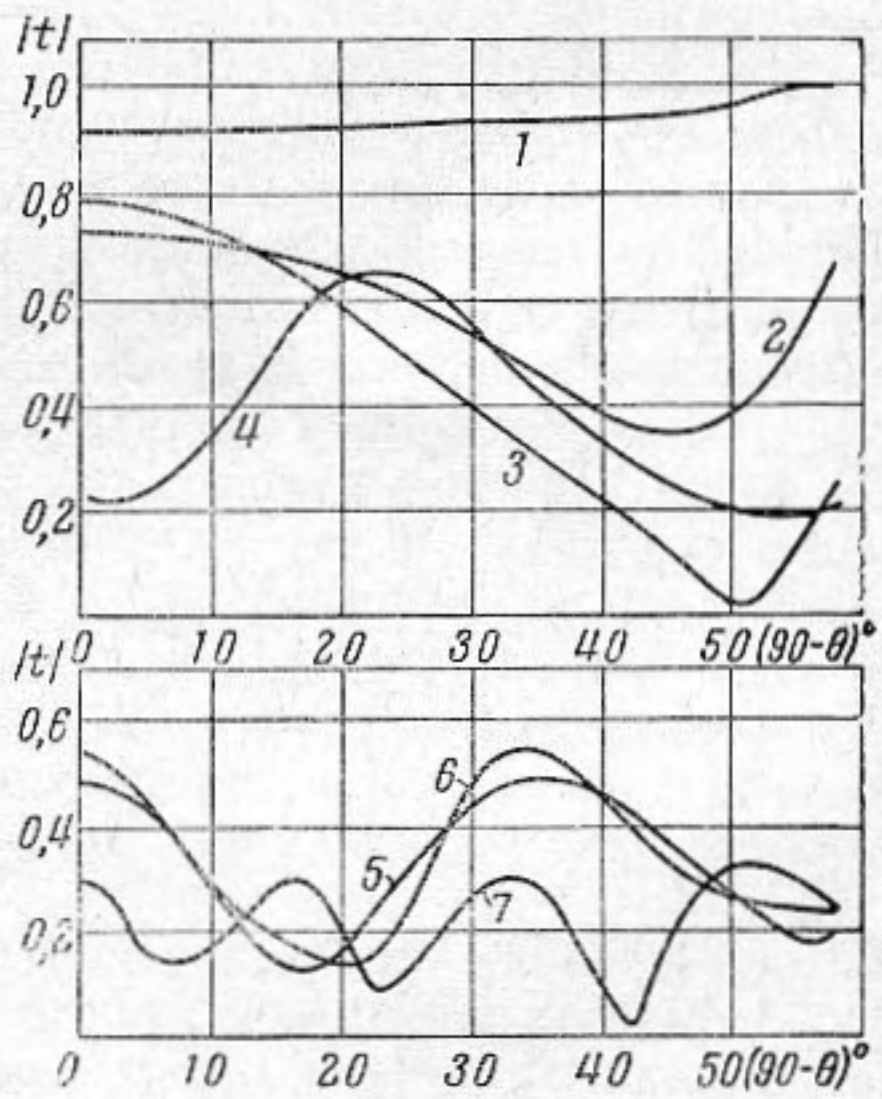
* Расчеты производились В. И. Рабиновичем под руководством Л. А. Ладыженского.

Исследовались зависимости модуля коэффициента прохождения $|t|$ от величины $k_t a$ (фиг. 2) при нормальном ($\theta = 90°$) падении плоской продольной упругой волны на решетку с параметром $\varepsilon = a / b = 0{,}17$ (кривая *1*), 0,27 (*2*), 0,4 (*3*). В области значений $k_t a < 0{,}04$ упругая волна практически полностью проходит через решетку. С увеличением $k_t a$ коэффициент прохождения начинает падать. При $k_t a \simeq 0{,}35$ наблюдается значительное — почти до нуля — уменьшение $|t|$. Это уменьшение является следствием резонанса цилиндрических полостей.



Фиг. 2

Известно [7], что отражение упругой волны от полости можно характеризовать поперечником рассеяния, размеры которого в области резонанса полости существенно возрастают. В решетке поперечники рассеяния перекрывают друг друга, что обусловливает значительное уменьшение коэффициента прохождения через решетку. Понижение резонансной частоты полостей в решетке по сравнению с резонансом одиночной цилиндрической полости, который для нулевой моды колебаний расположен в области $k_t a = 0{,}7 - 0{,}9$ [8], является следствием взаимодействия полостей, причем, во взаимодействии, кроме нулевой, участвуют все высшие моды колебаний, учитывавшиеся при расчете. Далее с увеличением $k_t a$, когда диаметр полости равен длине сдвиговой волны ($k_t a = \pi$), наблюдается второй резонанс решетки; при этом коэффициент прохождения имеет максимум. Следует отметить, что общий уровень коэффициента прохождения в области $k_t a = 0{,}08 - 2{,}0$ с увеличением параметра ε, т. е. при более тесном расположении полостей, падает.



Фиг. 3

При $k_t a > 4{,}0$ наблюдается тенденция роста $|t|$. В области $k_t a > 20 - 30$ расчет на электронной машине весьма неточен из-за плохой сходимости рядов; поэтому значения $|t|$ для этих $k_t a$ не были получены. Однако при дальнейшем росте можно ожидать появления резонансов, обусловленных также продольными волнами. Были исследованы также угловые характеристики $|t|$ при фиксированных значениях $k_t a$ и $\varepsilon = 0{,}27$ (фиг. 3). Рассмотрение угловых характеристик $|t|$ для $k_t a = 0{,}05$ (*1*); 0,16 (*2*); 0,22 (*3*); 0,39 (*4*); 0,49 (*5*); 0,55 (*6*); 1,16 (*7*) показывает, что при малых $k_t a \sim 0{,}05$ $|t|$ прак-

тически не зависит от θ. Для $k_t a$, лежащих до первого резонанса, с увеличением отклонения направления падения упругой волны от нормали к плоскости решетки, т. е. с увеличением угла $90° - \theta$, $|t|$ сначала уменьшается, причем минимум иногда доходит до нуля, а затем начинает расти. В области резонанса и выше кривая коэффициента прохождения $|t|$ начинает осциллировать, причем, чем больше $k_t a$, тем чаще осцилляции и меньше их размах.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. В. Тютекину за руководство работой и Е. Л. Шендерову — за полезное обсуждение результатов и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Лэмб. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
2. Л. А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос. Ж. эксп. и теор. физ., 1955, 25, 5.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. Ж. теор. физ., 1962, 32, 4, 381—394.
4. R. N. Franclin, G. H. Bryant. Cilindrical capacitive obstacles in a waveguide. Elect. Quart. I.E.E., 1963, 12, 4, 1709—1719.
5. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1941, т. 1.
6. Г. С. Айзенберг. Антенны сантиметровых волн. М., Связьиздат, 1957.
7. Д. В. Сивухин. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости. Акуст. ж., 1955, 1, 1, 77—88.
8. В. В. Тютекин. Рассеяние плоских волн цилиндрической полостью в изотропной упругой среде. Акуст. ж., 1959, 5, 1, 106—110.
9. А. Ляв. Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Ленинград

Поступила в редакцию
21 февраля 1966 г.