УДК 534.24

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОЗРАЧНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Т. Д. Кудрявцева

В статье [1] были даны выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины

$$\eta = \frac{D^4}{1-R^4}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty} R^{2m}\cos 2k_1 m(a+\xi)\right\} \tag{1}$$

— квадрата модуля коэффициента звукопрохождения для двухслойной системы с промежуточным слоем. Предполагалось, что толщина промежуточного слоя $a+\xi$ содержит случайную ошибку $\xi = N(0, \sigma)$, $a = \text{const}$; D, R — соответственно коэффициенты прохождения и отражения для крайнего слоя по энергии, k_1 — волновое число для промежуточного слоя. Оказывается возможным более полно охарактеризовать поведение случайной величины η, а именно — найти ее плотность распределения.

Плотность распределения периодической функции η от случайной величины ξ с заданным законом распределения может быть записана в форме, предложенной Левиным и Серовым [2]:

$$W(y) = \frac{D^4}{2\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)^2}}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-2k_1^2\sigma^2 m^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[\operatorname{marc\,cos}\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)\right]\cos 2k_1 ma\right\} =$$

$$= \frac{D^4}{2\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)^2}}\{\theta_3(q, u_1)+\theta_3(q, u_2)\}, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{1+R^4}{2R^2},\quad \beta = \frac{D^4}{2R^2},\quad \frac{D^4}{(1+R^2)^2} < y < 1, \tag{3}$$

$$q = \exp(-2k_1^2\sigma^2),$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\arccos\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)\mp k_1 a,$$

$\theta_3(q, u)$ — эллиптическая тэта-функция. Удобно представить $W(y)$ в виде

$$W(y) = \frac{D^4}{\pi R^2 y^2\sqrt{1-\left(\alpha-\frac{\beta}{y}\right)^2}}[1+q(H(z_1)+H(z_2))],$$

где $H(z)$ — табулированная [3] эллиптическая функция, $z_i = \cos 2u_i$, $i = 1, 2$.

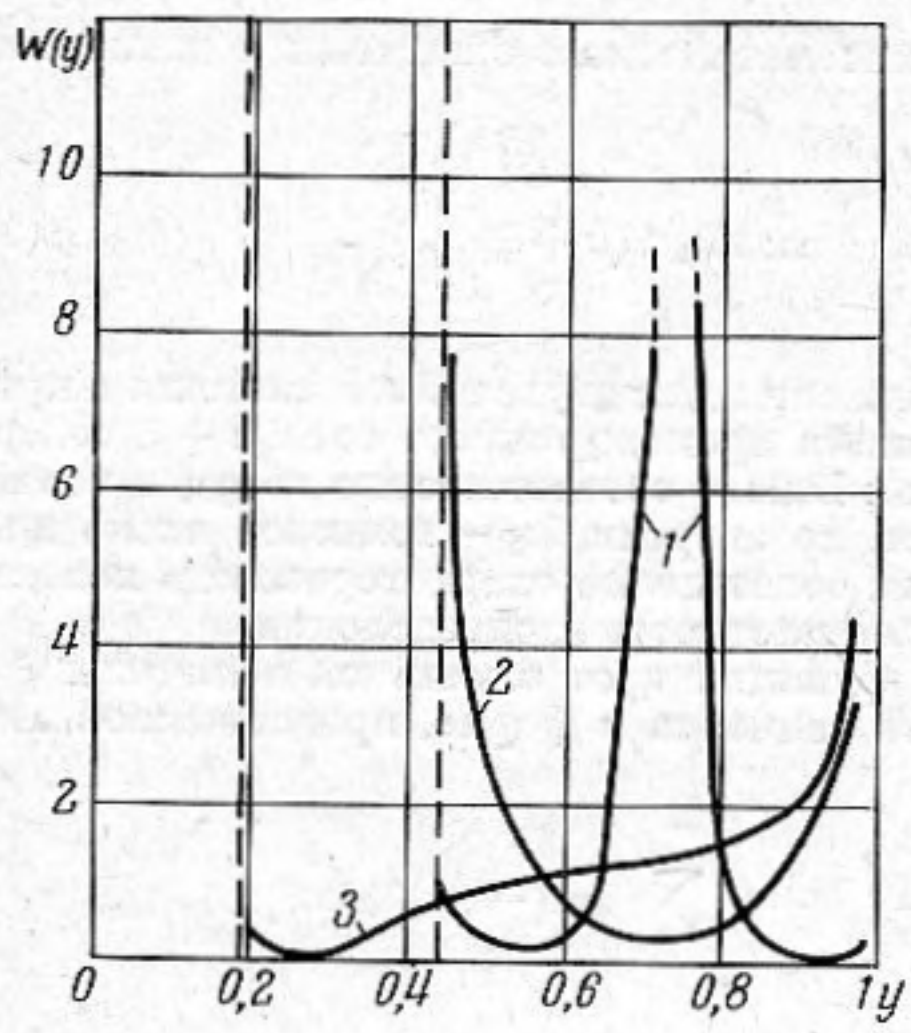
Появление случайной ошибки в толщине промежуточного слоя приводит к уменьшению максимумов и увеличению минимумов среднего квадрата модуля коэффициента звукопрохождения системы; в выражении для $M\eta$ появляются экспоненциальные множители по сравнению с формулой для абсолютно точно изготовленного фильтра ((1) при $\xi = 0$):

$$M\eta = \frac{D^4}{1-R^4}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty} R^{2m}\exp(-2k_1^2\sigma^2 m^2)\cos 2k_1 ma\right\}. \tag{4}$$

Если дисперсия $D\eta$ мала, можно с достаточной точностью считать случайную величину η равной ее математическому ожиданию. Например, можно судить об уменьшении максимумов η по сравнению со случаем идеального фильтра ($\xi = 0$) по уменьшению максимумов $M\eta$. Если дисперсия не является достаточно малой, оказывается полезным знать не только среднее $M\eta$, но и то, насколько вероятно появление определенных отклонений от среднего. Зная плотность распределения (2), можно опреде-

лить вероятность того, что случайная величина η при интересующем нас значении k_1a (в частности, в максимумах, т. е. при $k_1a = n\pi$, n — целое) лежит в некотором интервале значений (y_1, y_2).

Плотность распределения $W(y)$, как видно из (2), является антимодальной, т. е. имеет по крайней мере один минимум на интервале (3) и неограниченно возрастает при приближении к концам этого интервала. Если дисперсия $D\eta$ мала, то на интервале (3) существует максимум плотности, в окрестности которого лежит математическое ожидание. Например, при $R^2 = 0{,}2$; $\exp(-2k_1^2\sigma^2) = 0{,}992$; $k_1a = 10$ в окрестности точки $M\eta \cong 0{,}73$ расположен максимум плотности (см. фигуру, кривая *1*); $D\eta \sim \sim 10^{-3}$. В этом случае вероятность попадания η в интервал (0,63; 0,83) практически равна единице.



При тех же R^2 и k_1a, но при $\exp(-2k_1^2\sigma^2) = 0{,}887$ дисперсия $D\eta \sim \sim 10^{-2}$; соответствующий график плотности (кривая *2*) уже не имеет максимума внутри интервала (3). В случае $R^2 = 0{,}4$; $k_1a = \pi$; $\exp(-2k_1^2\sigma^2) = 0{,}82$ получаем $M\eta \cong 0{,}78$; вероятность попадания в интервал $M\eta \pm 0{,}1$ составляет всего 0,3, в то время как вероятность попадания в интервал (0,8; 1) равна 0,53, т. е. существенно больше (см. кривую *3*).

Вид функции (2) является типичным для плотности распределения периодической функции типа синуса от нормально распределенной случайной величины. Например, рассматривая квадрат модуля коэффициента звукоизоляции [4], мы получим для него функцию плотности вида, сходного с формулой (2):

$$W_1(y) = \frac{1}{G\pi\sqrt{1-\left(\frac{E^2+F^2-2y}{2G}\right)^2}}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp(-2k_1^2\sigma^2m^2)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left[m\arccos\frac{E^2+F^2-2y}{2G}\right]\cos[m(2k_1a-\Phi)]\right\},$$

где G, E, F, Φ — функции волновой толщины крайнего слоя k_2d и отношения волновых сопротивлений крайнего и среднего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Д. Кудрявцева, Б. Д. Тартаковский. Влияние неточностей конструкции двухслойных систем на их фильтрующие свойства. Акуст. ж., 1965, **11**, 2, 187—191.
2. Б. Р. Левин, В. Б. Серов. О распределении периодической функции случайной величины. Радиотехн. и электрон., 1964, **9**, 6, 1065—1067.
3. Шулер и Гебелейн. Таблицы эллиптических функций. ВЦ АН СССР, М., 1961.
4. Т. Д. Кудрявцева, Б. Д. Тартаковский. Влияние неточностей конструкций двухслойных систем на их звукоизолирующие свойства. Акуст. ж., 1965, **11**, 1, 62—67.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
6 мая 1966 г.

УДК 534.231

УПРУГИЕ СВОЙСТВА ПОЛУЖЕСТКОГО ПОЛИУРЕТАНОВОГО ПЕНОПЛАСТА ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

К. И. Мальцев

Нами были исследованы упругие свойства и потери полиуретановых пенопластов, полученных на основе смеси полиэфиров (рецептуры № 3 ВНИИСС и десмофена 2200) с диизоцианатом «смесь 65/35 ДУДЭГ». Материалы были разработаны и изготовлены во Владимирском научно-исследовательском институте синтетических смол