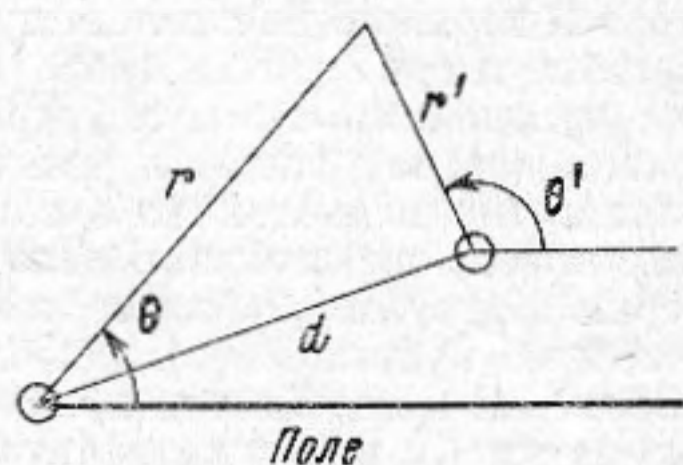


Фиг. 1



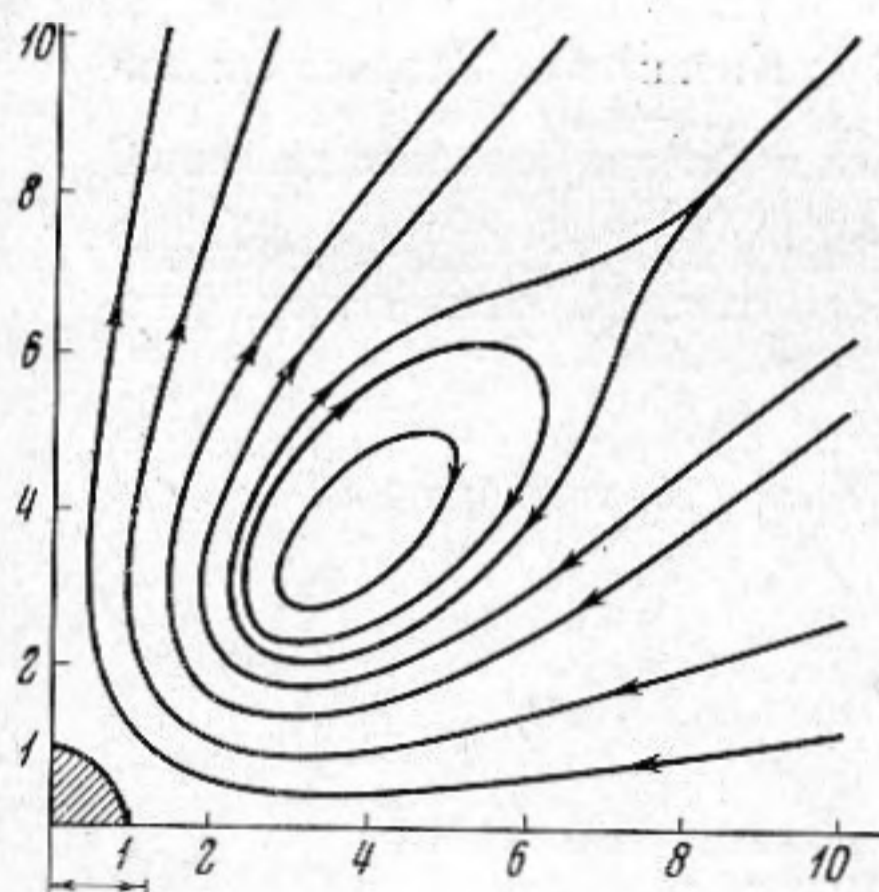
Фиг. 2

Скорость в любой точке среды будет равна  $U_1 + U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  — скорости среды соответственно в присутствии только первой или второй частицы. Поэтому уравнение (1) в системе координат, связанной с первой частицей, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \times U_1 + \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \times U_2 + (U_1 \nabla') (\nabla' \times U_1) + (U_2 \nabla') (\nabla' \times U_2) + \\ & + (U_1 \nabla') (\nabla' \times U_2) + (U_2 \nabla') (\nabla' \times U_1) = -v \nabla' \times \nabla' \times \nabla' U_1 - v \nabla' \times \nabla' \times \nabla' U_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ .

Оценим порядки членов данного уравнения; при этом будем рассматривать только случай, когда частицы разнесены на расстояние  $d$ , значительно превосходящее толщину пограничного слоя  $\delta$ .



Фиг. 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \times U_1 &= \frac{1}{T} \frac{U_1}{\delta} = \frac{U_1}{T} \delta^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \times U_2 &= \frac{1}{T} \frac{U_2}{d + \delta} \approx \frac{1}{T} \frac{U_2}{d} \delta^0, \\ (U_1 \nabla') (\nabla' \times U_1) &= U_1^2 \delta^{-2}, \\ (U_2 \nabla') (\nabla' \times U_2) &\approx \frac{U_2^2}{d^2} \delta^0, \\ (U_1 \nabla') (\nabla' \times U_2) &= -\frac{U_1 U_2}{d} \delta^{-1} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

где  $T$  — характерное время процесса, в нашем случае — период колебания. Пренебрегая в уравнении (2) членами более высокого порядка малости по  $\delta$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \times U_1 + (U_1 \nabla') (\nabla' \times U_1) &= \\ &= -v \nabla' \times \nabla' \times \nabla' U_1. \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение будет справедливо для  $U_2$ , если систему координат связать со второй частицей.

Таким образом, при выполнении условия  $d \gg \delta$ , уравнения движения среды относительно двух частиц разделяются. Решение каждого из этих уравнений для сферы и цилиндра известно только при  $s/a \ll 1$ , где  $s$  — амплитуда смещения,  $a$  — радиус сферы [2]. В этом случае функция тока потока около цилиндра\* выражается следующим образом:

$$\psi = -\frac{U_0^2}{4\omega} f(r/a, a/\delta) \sin 2\theta, \quad (3)$$

где  $U_0$  — амплитуда колебательной скорости,  $f(r/a, a/\delta)$  — выражаются через специальные функции. На фиг. 3 показаны линии тока потока (для одного квадранта), возникающего в звуковом поле около цилиндра.

\* Как показано Лейном [3], различие между потоками, возникающими около сферы и цилиндра, незначительно.



В нашем эксперименте [1]  $s/a > 1$ . Однако из соображений размерности и симметрии задачи можно утверждать, что при больших амплитудах звукового давления функция тока будет отличаться от функции тока при малых давлениях только множителем; конфигурация и направление потока останутся теми же.

Задача сводится теперь к нахождению потока около двух частиц, если известны потоки около каждой из них. Уравнение для стационарных потоков имеет вид

$$(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_0 + \nu\Delta\mathbf{U}, \quad (4)$$

где  $\nabla p_0$  — сила, вызывающая поток. Если число Рейнольдса для потока ( $Re_{\text{пот}} = 2aU/\nu$ , где  $U$  — скорость потока) мало, что справедливо для течений, возникающих в звуковом поле вокруг малых частиц, то уравнение (4) переходит в следующее:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p_0 + \nu\Delta\mathbf{U} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) линейно, следовательно, справедлив принцип суперпозиции и мы имеем право складывать функции тока, которые определяются соотношением (3) и связаны с  $\mathbf{U}$  линейной операцией  $\mathbf{U} = \text{rot } \psi$ .

Нас интересует поток относительно одной из частиц; его функция тока будет представлять собой сумму

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1 \approx -\frac{U_0^2}{\omega} f(r/a, a/\delta) \sin 2\theta,$$

$$\psi_2 \approx -\frac{U_0^2}{\omega} f(r'/a, a/\delta) \sin 2\theta',$$

$$\psi \approx -\frac{U_0^2}{\omega} [f(r/a, a/\delta) \sin 2\theta + f(r'/a, a/\delta) \sin 2\theta'].$$

Поток, определяющий движение второй частицы относительно первой, мы получим, положив  $r = d$  и  $r' = 0$ . В этом случае  $\psi \approx -\frac{U_0^2}{\omega} f(r/a, a/\delta) \sin 2\theta$ . Следовательно, вторая частица будет двигаться в потоке, возникающем около уединенной первой частицы.

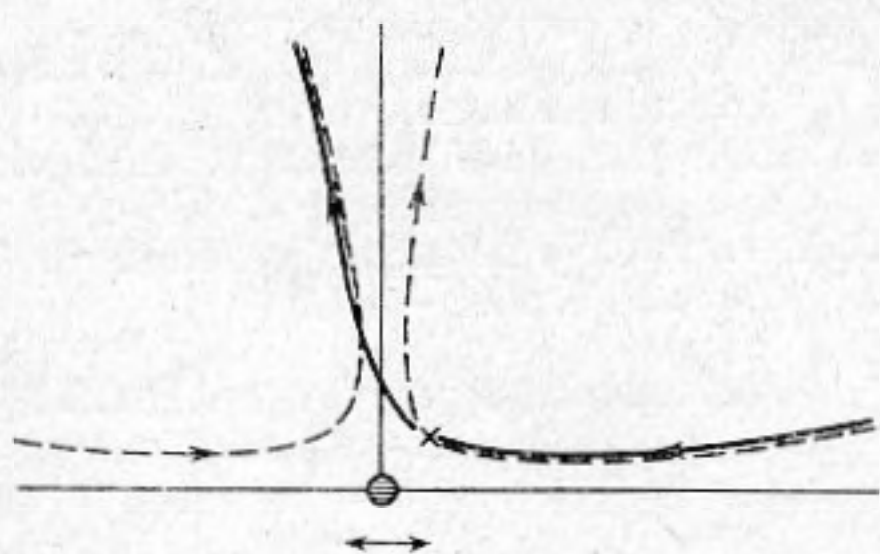
Рассмотрение траекторий относительного движения частиц показало, что они не точно повторяют линии тока около фиксированной частицы, а отличаются от последних меньшей кривизной в точке наибольшего сближения частиц. Одна из экспериментальных траекторий показана сплошной линией на фиг. 4; штриховыми линиями показаны возможные линии тока. Отсутствие полного совпадения между траекторией и линией тока может быть объяснено следующим образом.

На частицу, движущуюся в потоке, действует сила сопротивления Стокса. Уравнение движения частицы имеет вид

$$6\pi a\eta U = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \dot{U},$$

где  $\eta$  — вязкость среды,  $\rho$  — плотность частицы. Если частица движется в стационарном потоке по траектории с радиусом кривизны  $R$ , то  $\dot{U} = U^2/R$ . Тогда  $6\pi a\eta U = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \frac{U^2}{R}$ , или для частицы ликоподия, находящейся в воздухе,  $\frac{U}{R} = 10^3$ .

Условие движения частицы по линии тока запишется как  $10^3 \geq U/R$ . Если же скорость потока и кривизна линии таковы, что выполняется обратное неравенство  $10^3 < U/R$ , то частица не сможет следовать вдоль линии тока, а по инерции будет двигаться по касательной к линии тока в точке отрыва. Для случая, приведенного на фиг. 4, в точке, отмеченной крестом, действует неравенство  $10^3 < U/R$ , поэтому частица в этой точке отрывается и переходит на другую линию тока. Точки ближайшего подхода частиц друг к другу, где и скорость и кривизна максимальны, являются наиболее вероятными точками срыва частицы с линии тока. На более удаленных и менее искривленных участках траектории частица движется вдоль линии тока.



Фиг. 4



## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Л. Широкова, О. К. Экнадисянц. О взаимодействии частиц аэрозоля в звуковом поле. *Акуст. ж.*, 1965, 11, 3, 409—411.
2. M. Andres, U. Ingard. Acoustic streaming at Low Reynolds numbers *J. Acoust. Soc. America*, 1953, 25, 5, 932—938.
3. C. A. Lane. Acoustic streaming in the vicinity of a sphere. *J., Acoust. Soc. America*, 1955, 27, 6, 1082—1086.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступило в редакцию  
22 мая 1966 г.

УДК 534:231.1

### К ВОПРОСУ О ПРОХОЖДЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПОЛУВОЛНОВОЙ СЛОЙ

С. А. Филимонов

В книге [1] при рассмотрении прохождения упругой волны через плоский полуволновой слой приводится рисунок (ошибочный), на котором дано графическое изображение давления и колебательной скорости; при этом считается, что волна в слое является стоячей. Однако можно показать, что волновой процесс в полуволновом слое, граничащем с однородными средами, при прохождении через него упругой волны без учета потерь описывается формулами:

$$p = m \sin kx \sin \omega t - \cos kx \cos \omega t,$$

$$v = -\frac{m}{Z} \cos kx \cos \omega t + \frac{1}{Z} \sin kx \sin \omega t,$$

где  $p$  — давление,  $v$  — колебательная скорость,  $k$  — волновое число,  $Z$  — волновое сопротивление вещества слоя,  $m$  — отношение волнового сопротивления слоя к волновому сопротивлению окружающей среды,  $\omega$  — угловая частота,  $t$  — время. Каждая из приведенных формул отвечает комбинации двух стоячих волн с разными амплитудами, сдвинутых на четверть периода во времени и на четверть длины волны в пространстве. Этим выражениям можно придать другой вид:

$$p = -\sqrt{m^2 \sin^2 kx + \cos^2 kx} \cos(\omega t + \arctg m \operatorname{tg} kx),$$

$$v = -\sqrt{\frac{m^2}{Z^2} \cos^2 kx + \frac{1}{Z^2} \sin^2 kx} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{1}{m} \operatorname{tg} kx\right).$$

Амплитуды и сдвиг по фазе между давлением и колебательной скоростью в этих выражениях являются величинами переменными в зависимости от координаты  $x$ .

Таким образом, поле в слое можно рассматривать либо как комбинации двух стоячих волн давления и колебательной скорости с разными амплитудами, сдвинутыми на четверть периода во времени и на четверть длины волны в пространстве, либо как распространяющиеся волны давления и колебательной скорости с переменными амплитудами и с переменным фазовым сдвигом между ними в зависимости от координаты  $x$ . При этом интенсивность потока энергии в окружающей среде равняется интенсивности потока энергии в слое. На фигуре приведено графическое изображение давления и колебательной скорости при прохождении упругой волны через полуволновой слой при  $m = 3$ . Последовательности изображений волн давления  $p$  (сплошная линия) и колебательной скорости  $v$  (штриховая линия) наглядно иллюстрируют движение упругой волны через слой. Положительные значения  $p$  соответствуют сжатию, отрицательные — растяжению; положительные значения  $v$  соответствуют движению частиц в сторону убывания  $x$ , отрицательные — в сторону возрастания  $x$ . Кроме того, можно показать, что отношение плотности энергии в слое  $w_{сл}$  к плотности энергии в окружающей среде  $w_{ср}$  будет

$$\frac{w_{сл}}{w_{ср}} = \frac{1}{2} \frac{c_{ср}}{c_{сл}} \left( m + \frac{1}{m} \right),$$