АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 1

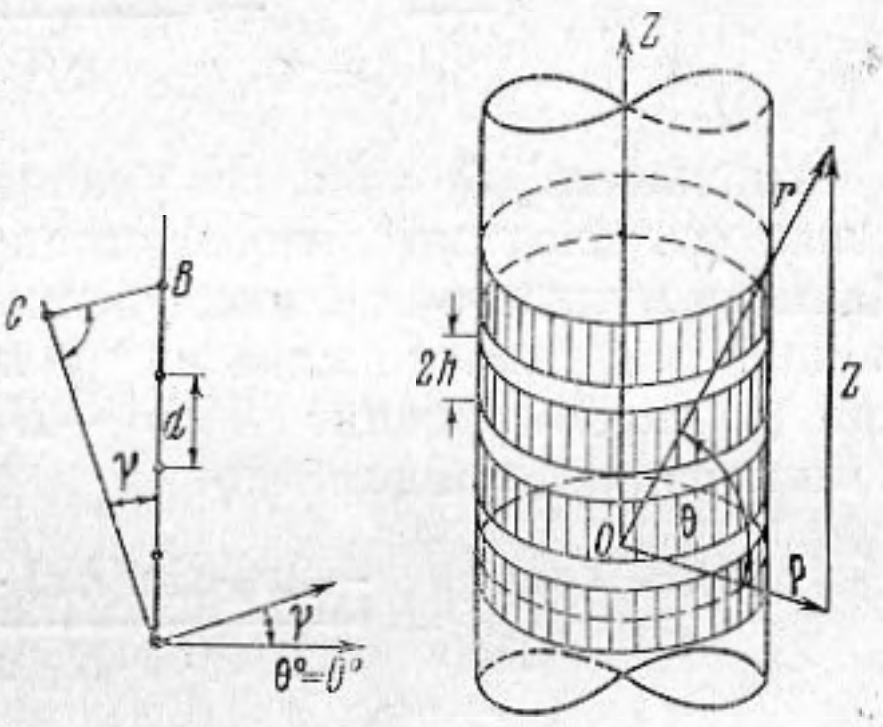
УДК 534.26

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ПУЛЬСИРУЮЩИХ КОЛЕЦ НА ЦИЛИНДРЕ

В. К. Алексеев, Л. Ф. Лепендин

Получено аналитическое выражение амплитуды потенциала скорости для дальнего поля, создаваемого системой пульсирующих колец на цилиндре. Приведены результаты численного расчета характеристик направленности системы.

Экспериментальные характеристики направленности цилиндрического излучателя, по поверхности которого создано некоторое распределение нормальных скоростей вдоль образующей цилиндра, получены в работе [1]. В настоящей работе рассматривается звуковое поле, создаваемое системой m несинфазно пульсирующих колец, шириной $2h$ каждое, расположенных на боковой поверхности акустически жесткого бесконечного цилиндра радиуса a так, что расстояние между серединами двух соседних колец равно d (фиг. 1). Предполагается, что кольцо с номером один расположено симметрично относительно плоскости $z = 0$, а все остальные в порядке их нумерации, в положительном направлении оси $0z$. При таком расположении, соотношения: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\rho = a$, $(p-1)d - h \leqslant z \leqslant (p-1) \cdot d + h$, где $p = 1, 2, 3, \ldots, m$, определяют участки поверхности цилиндра, занятые излучателями.



Фиг. 1

Считая, что каждое кольцо пульсирует со скоростью: $v_0 \cdot e^{-i(\omega t - \alpha_p)}$, $p = 1, 2, 3, \ldots, m$, мы приходим к внешней краевой задаче Неймана. В области $a \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ нужно найти решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее на поверхности цилиндра граничному условию:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \psi(z), \tag{2}$$

где кусочно непрерывная функция $\psi(z)$ определена так: $\psi(z) = v_0 \cdot e^{i\alpha_p}$ при $(p-1)d - h \leqslant z \leqslant (p-1)d + h$, где $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ и $\psi(z) \equiv 0$ при всех других значениях переменной z. Кроме того, на бесконечности для функции $U(\rho; z)$ должно выполняться условие излучения [2], соответствующее временной зависимости вида $e^{-i\omega t}$ (φ, ρ, z — цилиндрические коор-

динаты, k — волновое число, U — амплитуда потенциала точки наблюдения, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ в силу симметрии поля относительно оси цилиндра).

Данная краевая задача относится к классу задач математической физики [3] с непрерывным спектром ($-\infty < z < +\infty$), поэтому применим к формулам (1) и (2) интегральное преобразование Фурье. Умножим левые и правые части (1), (2) на множитель $e^{i\tau z}$ и проинтегрируем их по переменной z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Вводя обозначение

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} U \cdot e^{i\tau z}\, dz$$

и вычисляя интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2U}{dz^2} \cdot e^{i\tau z}\, dz = -\tau^2 \cdot F$$

при условии, что $\lim\limits_{z\to\pm\infty} U = \lim\limits_{z\to\pm\infty} \frac{\partial U}{\partial z} = 0$, преобразуем формулу (1) к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho} + \nu^2 \cdot F = 0, \qquad (3)$$

где $\nu = \sqrt{k^2 - \tau^2}$, а условие (2) к виду:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \frac{+2v_0 \cdot \sin(h\tau)}{\tau} \cdot \sum_{p=1}^{m} e^{i[d(p-1)\cdot\tau+\alpha_p]}. \qquad (4)$$

Уравнение (3) является уравнением Бесселя нулевого порядка от аргумента $\rho\nu$. Следовательно, функция $F = AH_0(\rho\nu)$ (H_0 — первая функция Ханкеля нулевого порядка, удовлетворяющая условию излучения при временной зависимости вида $e^{-i\omega t}$) является его решением. Используя условие (4) и соотношение $H_0' = -H_1$ (H_1 — первая функция Ханкеля первого порядка), найдем, что

$$F = \frac{-2v_0 \cdot \sin(h\tau) \cdot H_0(\rho\nu)}{\tau \cdot \nu \cdot H_1(a\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{m} e^{i[d(p-1)\tau+\alpha_p]}.$$

Применяя к функции F обратное интегральное преобразование Фурье, согласно которому

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F \cdot e^{-i\tau z}\, d\tau,$$

мы получим решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) и условию излучения в следующем виде:

$$U(\rho; z) = -\frac{v_0}{\pi} \int_{-\infty} \frac{\sin(h\tau) \cdot H_0(\rho\nu) \cdot e^{-i\tau z}}{\tau \cdot \nu \cdot H_1(a\nu)} \cdot \sum_{p=1}^{m} e^{i[d(p-1)\tau+\alpha_p]}\, d\tau. \qquad (5)$$

Путь интегрирования проходит вдоль вещественной оси τ от $-\infty$ до $+\infty$, причем точка ветвления $-k$ обходится сверху, а точка ветвления $+k$ — снизу. Если предположить, что волновое число k имеет малую мнимую часть, то точки ветвления сместятся с пути интегрирования, и вопрос об их обходе отпадает. Выражение (5) определяет амплитуду потенциала скорости в любой точке среды вне цилиндра и, в принципе, может быть вычислено при любых фиксированных значениях параметров.

Для получения асимптотического значения интеграла (5) применим метод седловых точек, который обсуждался в работах [4—6] и др. Предположим $\rho\nu \gg 1$, что соответствует полю в дальней зоне. Далее, следуя работе [4], вместо функции $H_0(\rho\nu)$ возьмем первый член ее асимптотического разложения, имеющий вид

$$H_0(\rho\nu) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho\nu}} \cdot e^{i\left(\rho\nu - \frac{\pi}{4}\right)}$$

и произведем замену переменной интегрирования τ в формуле (5) согласно формуле $\tau = k \cdot \sin s$. Теперь перейдем от цилиндрических координат ρ и z к сферическим r и θ, связанных формулами: $\rho = r \cdot \cos\theta$, $z = r \cdot \sin\theta$ при $-\frac{\pi'}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Выполняя эти преобразования, приведем формулу (5) к виду:

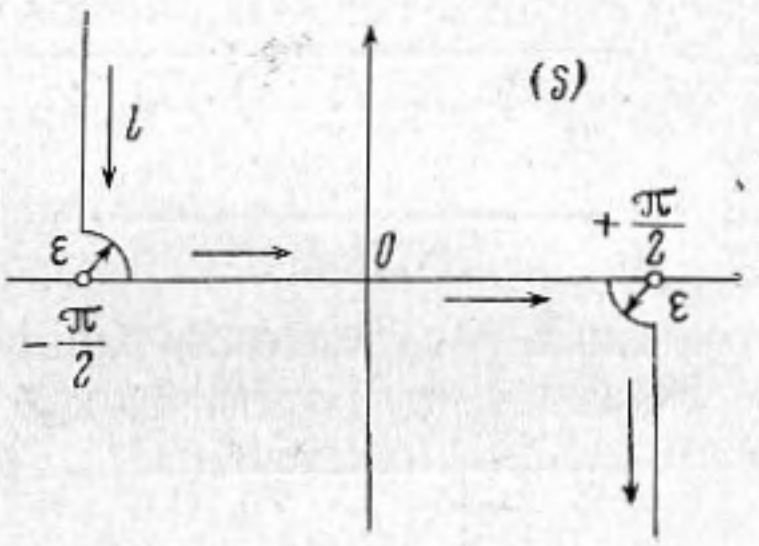
$$U \approx \frac{v_0 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\pi^3 \cdot k^3 \cdot r \cdot \cos\theta}} \int_L f(S) \cdot e^{r\varphi(S)}\, dS, \qquad (6)$$

где

$$f(S) = \frac{\sin(kh \sin S)}{\sin S \cdot H_1(ka \cos S)\sqrt{\cos S}} \cdot \sum_{p=1}^{m} e^{i[d(p-1)\tau + \alpha_p]}$$

$$\Phi(S) = ik \cos(S + \theta),$$

а путь интегрирования проходит вдоль прямой, параллельной положительной мнимой полуоси комплексной плоскости S, точка ветвления $-\pi/2$ обходится по четверти дуги окружности малого радиуса ε сверху, затем вдоль отрезка вещественной оси от точки $-\pi/2 + \varepsilon$ до точки $\pi/2 - \varepsilon$, точка ветвления $\pi/2$ обходится по четверти дуги окружности малого радиуса ε снизу, и наконец, вдоль прямой параллельной отрицательной мнимой полуоси (фиг. 2). Асимптотическое значение интеграла (6) найдем [6, 7] по формуле



Фиг. 2

$$\int f(S) \cdot e^{r\varphi(S)}\, dS \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\pi}{-r\varphi''(S_0)}} \cdot f(S_0) \cdot e^{r\varphi(S_0)}, \qquad (7)$$

где $S_0 = -\theta$ — седловая точка, определенная из условия: $\Phi'(S_0) = 0$. Вычислив $\Phi(-\theta) = ik$, $\Phi''(-\theta) = -ik$, $f(S_0) = f(-\theta)$, мы получим после несложных преобразований

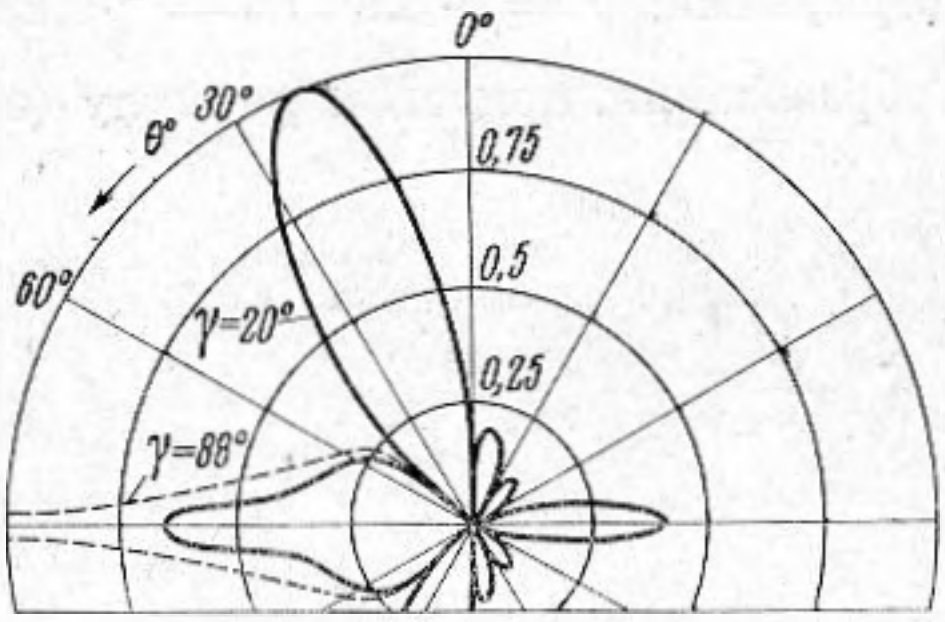
$$U \approx \frac{e^{i\left(kr + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2v_0 \sin(kh \sin\theta)}{\pi r k^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot H_1(ka \cos\theta)} \cdot \sum_{p=1}^{m} e^{-i[kd(p-1)\sin\theta - \alpha_p]}. \qquad (8)$$

Следует отметить, что полученное соотношение имеет место при условии $kr \cdot \cos^2\theta \gg 1$ (ранее предполагалось, что $\rho\nu \gg 1$). Следовательно, формула (8) выражает амплитуду потенциала скорости дальнего поля только при достаточно больших значениях kr (или $k\rho$, причем $z = \rho\,\mathrm{tg}\,\theta$) и переменной θ, определенной неравенством $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

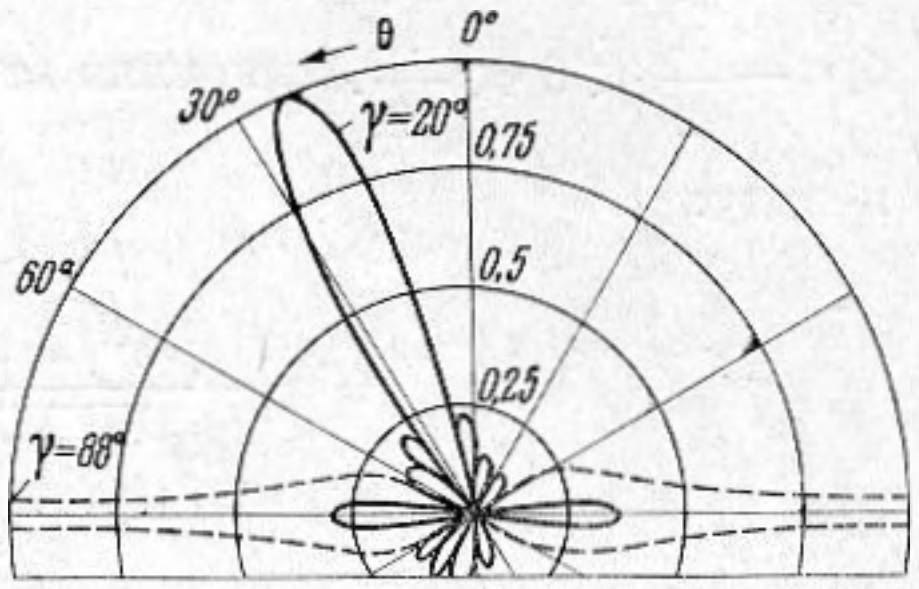
При $\alpha_p = kBC = kd(p-1)\sin\gamma$, $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ (фиг. 1) формула (8) примет наиболее простой вид:

$$U \approx \frac{2v_0 e^{i\left(kr + \frac{\pi}{2} - \Delta m + \Delta\right)} \cdot \sin(m\Delta) \cdot \sin(kh\sin\theta)}{\pi r k^2 \cdot \sin\Delta \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot H_1(ka\cos\theta)} \qquad (9)$$

т. к. сумма, входящая в формулу (8), в этом случае является геометрической прогрессией, знаменатель которой равен $e^{-2\Delta i}$, $\Delta = \frac{kd}{2}(\sin\theta - \sin\gamma)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Нормируя выражение (9) в направлении угла компенсации γ, мы получим комплексную характеристику направленности системы

$$R = M \cdot \frac{\sin(m\Delta) \cdot e^{-i\Delta(m-1)}}{m \cdot \sin\Delta} \cdot \frac{\sin(kh\sin\theta)}{kh\sin\theta} \cdot \frac{H_1(ka)}{\cos\theta \cdot H_1(ka\cos\theta)} \qquad (10)$$

где

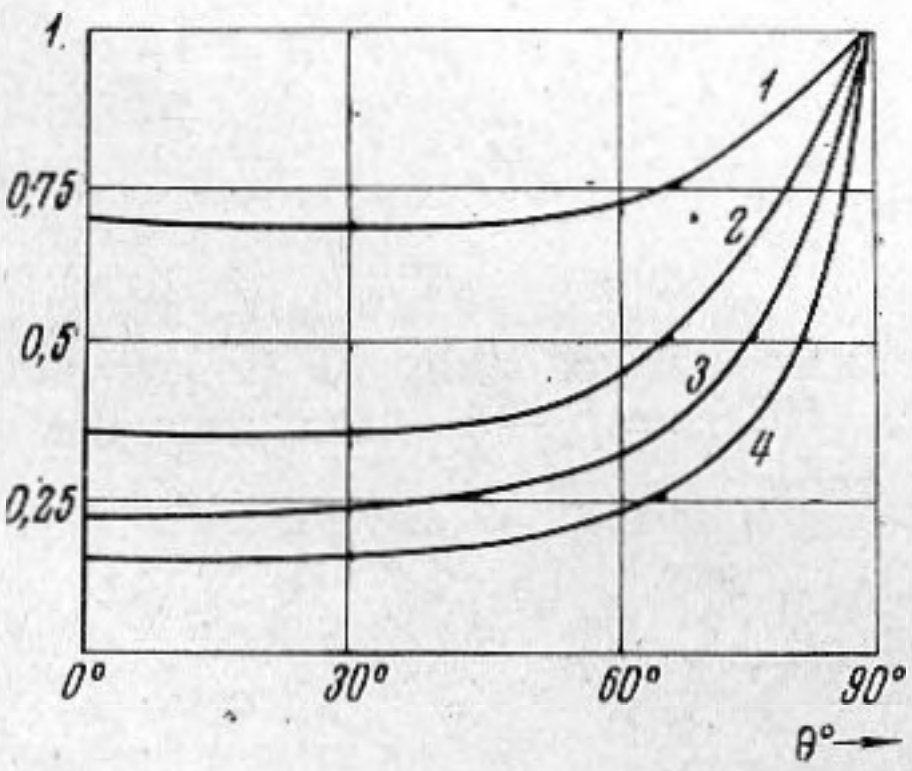
$M = \frac{kh\sin\gamma \cdot \cos\gamma \cdot H_1(ka\cos\gamma)}{\sin(kh\sin\gamma) \cdot H_1(ka)}$ — нормирующий множитель,

$R_1 = \frac{\sin(m\Delta) \cdot e^{-i\Delta(m-1)}}{m\sin\Delta}$ — характеристика направленности системы точечных излучателей, расположенных по прямой линии на расстоянии d друг от друга и компенсированных в направлении γ, и наконец

$$R_2 = \frac{\sin(kh \cdot \sin\theta)}{kh \cdot \sin\theta} \cdot \frac{H_1(ka)}{\cos\theta \cdot H_1(ka\cos\theta)}$$

— характеристика направленности кольца шириной $2h$, расположенного на поверхности кругового цилиндра радиуса a [8]. Вполне очевидно, что первый множитель в последнем равенстве является характеристикой направленности отрезка длиной $2h$, а второй — харатеристикой направленности элементарного кольца. Следует отметить, что при $h \to 0$ и $ka \ll 1$, $R \to R_1$, так как в этом случае [9] можно положить

$H_1(ka\cos\theta) \approx -2i / \pi \cdot ka \cdot \cos\theta$.



Фиг. 5

Это соотношение можно использовать при вычислении модуля функции $H_1(ka\cos\theta)$ при значениях θ, близких $k \pm \pi / 2$.

На фиг. 3 изображены диаграммы направленности системы, рассчитанные по формуле (10) при значениях параметров: $m = 10$; $ka = 14$;

$kd = 0{,}5\pi$; $kh = 0{,}24\pi$; $\gamma = 20°$, $88°$. Для большей наглядности характеристики направленности построены в полярных координатах. Из графиков фиг. 3 видно, что с увеличением угла компенсации γ, при $d \leqslant \lambda/4$ [10], происходит значительное одностороннее увеличение излучения вдоль акустической оси системы. На фиг. 4 представлены графики, рассчитанные при значениях параметров: $m = 10$; $ka = 14$; $kr = \pi$; $kh = 0{,}49\pi$; $\gamma = 20°$, $88°$. Сужение основного лепестка характеристики направленности при значениях угла компенсации γ, близких к $90°$, вполне объясняется кривыми фиг. 5, являющимися угловыми диаграммами множителя:

$$R_3 = \frac{\cos\gamma \cdot H_1(ka\cos\gamma)}{H_1(ka)} \cdot \frac{H_1(ka)}{\cos\theta \cdot H_1(ka\cdot\cos\theta)}$$

(характеристика направленности элементарного кольца, нормированная в направлении γ). Графики строились при значениях $\gamma = 88°$ и значениях параметра ka, соответственно равного $1 - ka = 1$, $2 - ka = 7$, $3 - ka = 14$, $4 - ka = 21$.

Из рассмотрения кривых фигуры 5 следует, что при значениях угла компенсации γ, близких к $90°$ ($d = \lambda/4$, $\lambda/2$, $2h \leqslant d$) увеличение параметра ka приводит к более направленному излучению вдоль акустической оси системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ананьева. Цилиндрический излучатель из керамики титаната бария, излучающий вдоль оси цилиндра. Акуст. ж., 1956, 2, 3, 323—325.
2. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1 и 2. М., ИЛ., 1960.
3. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд. Сборник задач по математической физике, гл. VI. М., ГТТИ, 1955.
4. А. А. Пистолькорс. Излучение из продольных щелей в круговом цилиндре. Ж. техн. физ., 1947, 17, 3, 365—376.
5. D. T. Laird and H. Cohen. Directionality patterns for acoustic radiation from a source on a Rigid cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 46—49.
6. Д. Е. Вакман. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., Сов. радио, 1962.
7. Э. Копсон. Асимптотическое разложение. М., Изд-во «Мир», 1966.
8. В. К. Алексеев, Л. Ф. Лепендин. Акустическое поле пульсирующего кольца на цилиндре. Акуст. ж., 1967, 13, 1, 126—128.
9. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963.
10. Д. Уоррен Хортон. Основы гидролокации. Л., Судпромгиз, 1961.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
30 апреля 1966 г.