АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

УДК 534.26

О ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НАД УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Л. М. Лямшев

Рассматривается задача об отражении звуковых волн, создаваемых точечным гармоническим источником, от тонкой безграничной упругой пластины в движущейся однородной среде. Отраженное поле представлено в интегральной форме в виде разложения по плоским волнам. В результате асимптотического вычисления интеграла методом стационарной фазы и учета первого члена в разложении подынтегральной функции в окрестности стационарной точки устанавливается, что на больших расстояниях от пластины, как и в случае неподвижной среды, поле представляет собой геометрически отраженную «сферическую» волну.

Рассмотренная нами ранее в работе [1] задача об отражении плоской звуковой волны от упругой пластины в однородной движущейся среде возникает, если источник звуковых колебаний расположен очень далеко от пластины (в бесконечно удаленной точке). Проанализируем другой случай, когда расстояние от источника до пластины конечно. Исследование поля точечного источника над поверхностью пластины в движущейся однородной среде может иметь известное практическое значение.

Пусть в точке $(0, 0, z)$ прямоугольной, неподвижной относительно пластины, системы координат расположен источник гармонических звуковых колебаний частоты ω и требуется определить звуковое поле над пластиной, расположенной в плоскости $x0y$. Направление потока пусть совпадает с положительным направлением оси x. Для определения поля отраженной волны воспользуемся методом плоских волн, детально развитым Бреховских [2], в частности, применительно к теории отражения сферических волн от плоских границ раздела в неподвижной среде. Следуя работе [3], представим поле точечного источника в движущейся однородной среде в интегральной форме в виде суперпозиции плоских волн

$$\frac{\exp[i\hat{k}R^*]}{R} = \frac{i}{2\pi\sqrt{1-\beta^2}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big[i\Big(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hat{k}\beta\Big)x + \\ + ip_y y + ip_z(z - z_0)\Big] \frac{dp_\xi dp_y}{p_z} \tag{1}$$

где

$$R^* = R - \beta x, \quad R = \sqrt{x^2 + (1-\beta^2)[y^2 + (z-z_0)^2]},$$

$$p_\xi^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2 = \hat{k}^2, \quad \hat{k} = \frac{k}{1-\beta^2}.$$

Поле отраженной от пластины волны естественно рассматривать как совокупность плоских волн, входящих в разложение (1), приписав каждой волне соответственный коэффициент отражения $A(p_\xi, p_y)$ и учтя набег

фазы на пути распространения падающей и отраженной волн от источника к приемнику. Следовательно, для поля отраженной волны можно написать выражение:

$$p_r(x, y, z) = \frac{i}{2\pi\sqrt{1-\beta^2}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hat{k}\beta\right)x + ip_y y + \right.$$

$$\left. + i\sqrt{\hat{k}^2 - p_y^2 - p_\xi^2}(z + z_0)\right] A(p_\xi, p_y) \frac{dp_\xi dp_y}{\sqrt{\hat{k}^2 - p^2 - p_\xi^2}}. \tag{2}$$

Проанализируем интегральное представление (2). Для этого, прежде всего, напишем выражение для коэффициента отражения $A(p_\xi, p_y)$. Рассмотрим случай, когда учитываются лишь изгибные колебания пластины и не принимаются во внимание поперечные колебания сжатия. В этом случае коэффициент отражения определяется формулой

$$A = \frac{Z}{Z + 2Z_r},$$

где

$$Z = -i\omega m_1 \left\{1 - \frac{\left[\left(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hat{k}\beta\right)^2 + p_y^2\right]^2}{k_f^4}\right\}$$

— импеданц пластины и

$$Z_r = \frac{\omega\rho\left[1 - \frac{\beta}{k}\left(\frac{p_\xi}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hat{k}\beta\right)\right]^2}{\sqrt{\hat{k}^2 - p_\xi^2 + p_y^2}} -$$

— импеданц излучения. В приведенных выше соотношениях и дальше $k = \omega / c$, $\hat{k} = k / 1 - \beta^2$, c — скорость звука в неподвижной среде, $m_1 = \rho_1 h$ — масса пластины на единицу площади, h — толщина и ρ_1 — плотность пластины, $k_f = \omega / c_f$, c_f — скорость распространения изгибных колебаний в пластине, β — число Маха; множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

Преобразуем интеграл (2) к более удобному для дальнейшего анализа виду. Введем поджатую систему координат ξ, y, z

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y = y, \; z = z \tag{3}$$

и сделаем замену переменных интегрирования

$$p_\xi = \frac{k}{\sqrt{1-\beta^2}} q\cos\varphi, \quad p_y = \frac{k}{\sqrt{1-\beta^2}} q\sin\varphi, \quad p_z = \frac{k}{\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{1-q^2}. \tag{4}$$

Предположим также для простоты рассмотрения, что скорость распространения изгибных колебаний в пластине существенно меньше скорости звука в окружающей среде, т. е. пусть $k_f > k$. Это не ограничивает общности рассуждений. Напишем с учетом сделанных допущений интеграл (2) в поджатой системе координат и в новых переменных q и φ.

$$p_r(\xi, y, z) = \frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi} \exp\left[-i\frac{k\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\xi\right] \int\limits_0^\infty q dq \int\limits_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{k}{\sqrt{1-\beta^2}} \times\right.$$

$$\times \left[iq(\xi\cos\varphi + y\sin\varphi) - \sqrt{q^2-1}(z + z_0)\right] \times$$

$$\times \frac{d\varphi}{(1-\beta^2)^{3/2}\sqrt{q^2-1} + 2b(1-\beta q\cos\varphi)^2}, \tag{5}$$

где $b \equiv \rho c / \omega m_1$.

Вычисление интеграла (5) проведем, пользуясь асимптотическим методом интегрирования двойных интегралов [4]. Введем сферическую систему координат с началом в точке, совпадающей с «мнимым источником», т. е. зеркальным отображением действительного источника. Для этого положим

$$\xi = r\cos\psi\cos\chi, \qquad y = r\cos\psi\sin\chi, \qquad z + z_0 = r\sin\psi. \tag{6}$$

Заметим, что из условий получения интегрального представления (5) следует брать ту ветвь $\sqrt{q^2-1}$, для которой при больших q корень положителен. Особая точка обходится под осью q, откуда следует, что при $q < 1$ корень $\sqrt{q^2-1} = -i\sqrt{1-q^2}$. Теперь выражение (5) принимает вид

$$p_r(r,\psi,\chi) = \frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi}\exp\left[-i\frac{k\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}r\cos\psi\cos\chi\right]\int\limits_0^\infty q\,dq\,\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{1-\beta^2}}[iqr\cos(\varphi-\chi)\cos\psi - \sqrt{q^2-1}\,r\sin\psi\right\}\times$$

$$\times\frac{d\varphi}{(1-\beta^2)^{3/2}\sqrt{q^2-1}+2b(1-\beta q\cos\varphi)^2}. \tag{7}$$

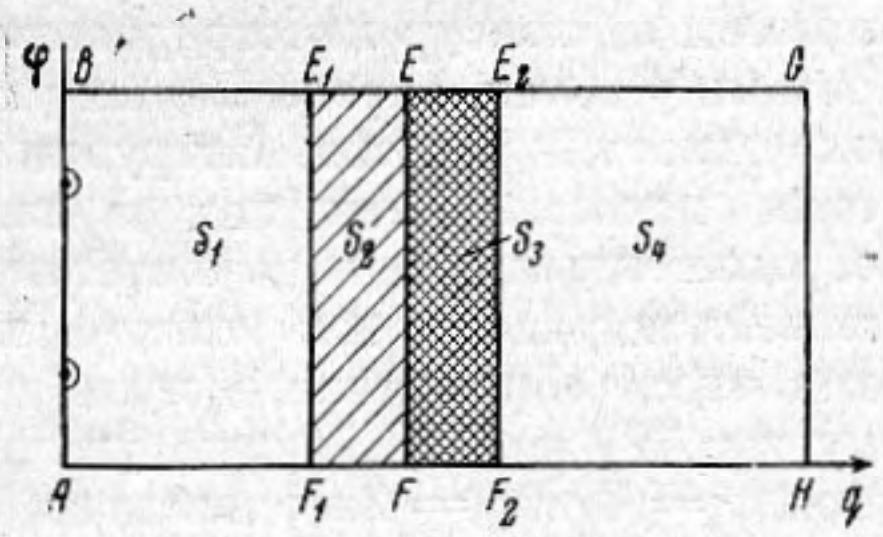
Напишем формулу для асимптотической оценки двойных интегралов при больших r.

$$\iint\limits_S F(q,\varphi)\exp[irw(q,\varphi)]\,dq\,d\varphi = \frac{i}{r}\left[\pm\frac{2\pi}{(w_{qq}w_{\varphi\varphi}-w_{q\varphi}{}^2)_{00}}\times\right.$$

$$\times F(q_0,\varphi_0)\exp[irw(q_0,\varphi_0)] - \int\limits_\Gamma \frac{F(q,\varphi)\exp[iw(q,\varphi)]}{|\operatorname{grad} w|^2}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial w}{\partial q}d\varphi - \frac{\partial w}{\partial\varphi}dq\right)\right] + \frac{1}{r}0\left(\frac{1}{r}\right). \tag{8}$$

Здесь контур Г заключает область интегрирования S. Индексы 00 указывают на то, что значение функции берется в стационарной точке φ_0, q_0, в которой функция достигает минимума или максимума (в первом случае следует взять верхний знак, во втором — нижний). Формула (8) получена в предположении, что функции $F(q,\varphi)$ и $w(q,\varphi)$ непрерывны вместе со своими производными, причем первая до второй, а вторая до четвертой включительно. Область интегрирования для рассматриваемого нами двойного интеграла (7), показана на фигуре. Производные функции $F(q,\varphi)$ становятся разрывными на прямой EF, на которой обращается в нуль корень $\sqrt{q^2-1}$. Поэтому область интегрирования мы разобьем на участки S_1 и S_4, а также S_2 и S_3, расположенные по обе стороны прямой EF *. Найдем точки максимума или минимума функции $w(q,\varphi)$. С этой целью исследуем систему уравнений $w_\varphi = 0$ и $w_q = 0$ (при этом из исследования исключим углы ψ,



* Соображения, излагаемые ниже, во многом подобны рассуждениям, приведенным в статье [5].

близкие к нулю). Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &q\sin\psi-\sqrt{1-q^2}\cos\psi\cos(\varphi-\chi)=0\\ &q\cos\psi\sin(\varphi-\chi)=0\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Система уравнений (9) удовлетворяется в точках с координатами

$$\begin{aligned} q=\cos\psi,\qquad &\varphi=\chi \text{ при } \psi<\pi/2,\\ q=-\cos\psi,\qquad &\varphi=\pi-\chi \text{ при } \psi>\pi/2,\end{aligned} \tag{10}$$

а также в точках

$$q=0,\quad \varphi=\chi+\frac{\pi}{2},\quad \varphi=\chi+\frac{3\pi}{2}. \tag{11}$$

Из решений системы уравнений (9) следует, что стационарная точка находится в области S_1, и является точкой эллиптического типа, в которой функция $w(q,\varphi)$ имеет максимум, поскольку

$$w_{q\varphi}(q_0,\varphi_0)\equiv 0,\qquad w_{qq}(q_0\varphi_0)\,w_{\varphi\varphi}(q_0\varphi_0)>0 \text{ и } w_{qq}(q_0,\varphi_0)<0.$$

Определим основную часть интеграла (7) в стационарной точке. На основании формулы (8) она будет равна

$$p_r(r,\psi,\chi)\approx-\frac{i(1-\beta^2)\sin\psi}{r[(1-\beta^2)^{3/2}\sin\psi+2b(1-\cos\psi\cos\chi)^2]}\times$$
$$\times\exp\left[i\frac{kr}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta\cos\psi\cos\chi)\right],$$

или в первоначальной системе координат x, y, z

$$p_r(r,\psi,\chi)\approx-\frac{i\omega m_1(1-\beta^2)^{3/2}\sin\psi}{i\omega m_1(1-\beta^2)^{3/2}\sin\psi-2\rho c[1-\beta\cos\psi\cos\chi]^2}\times$$
$$\times\frac{\exp[i\hat{k}R_1^*]}{R_1}=A(\psi,\chi)\frac{\exp[i\hat{k}R_1^*]}{R_1}, \tag{12}$$

где

$$R_1=\sqrt{x^2+(1-\beta^2)[y^2+(z+z_0)^2]},\qquad R_1^*=R_1-\beta x.$$

К выражению (12) следует добавить член, получающийся после вычисления интеграла по контуру Γ_1, ограничивающему область S_1. Точки, определяемые соотношениями (11), окружим малыми полуокружностями и примем за контур интегрирования Γ_1 прямоугольник ABE_1F_1 с двумя вырезами у точек, определяемых равенствами (11). Устремим радиусы полуокружностей к нулю. Нетрудно видеть, что интегралы по полуокружностям исчезают, так как в них подынтегральные функции остаются ограниченными, а путь интегрирования бесконечно убывает. На прямолинейном участке AB контура интегрирования Γ_1 интеграл исчезает, так как здесь обращается в нуль подынтегральная функция. Интегралы по путям AF_1 и BE_1 взаимно уничтожаются, ибо подынтегральная функция при $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ одинакова, а интегрирование по q в этих интегралах ведется в противоположных направлениях. Остается интеграл по пути E_1F_1 и остаточный член, порядок которого больше r^{-1}. Оценим теперь интеграл по области S_4. В этой области стационарные точки отсутствуют и двойной интеграл по области сводится на основании формулы Грина к интегралу по контуру этой области прямоугольнику E_2F_2GH. Интегралы по путям E_2G и F_2H взаимно уничтожаются. Интеграл по пути GH содержит затухающий с ростом q по показательному закону множитель и поэтому исчезает, если этот путь удаляется в бесконечность вдоль оси q

и тем самым получается значение интеграла по полубесконечной полосе. Остается только интеграл по прямой E_2F_2. Для оценки интеграла по областям S_2 и S_3 оказывается удобным ввести новые переменные $\gamma=\sqrt{1-q^2}$ и $\eta=\varphi$ так, чтобы одна из границ области совпадала с кривой, на которой $\gamma=0$. Поскольку в областях S_2 и S_3 имеет место неравенство $\operatorname{grad} w \neq 0$ и это неравенство не нарушается ни внутри области, ни на ее границе, то как и в предыдущем случае, пользуясь формулой Грина, поверхностные интегралы можно заменить интегралами по контурам, ограничивающим области S_2 и S_3. Анализ этих контурных интегралов во многом подобный вышеизложенным рассуждениям, приводит к заключению, что интегралы по областям S_2 и S_3 дают член порядка больше, чем r^{-1} и этот член при больших r может не учитываться, поскольку основное значение интеграла имеет порядок r^{-1}. Наконец, интегралы по прямым E_1F_1 и E_2F_2 оказываются равными и противоположными по знаку.

Таким образом, на достаточно больших расстояниях от пластины поле отраженной волны, возникающей в результате действия точечного гармонического источника звуковых колебаний над пластиной в однородной движущейся среде, полностью определяется коэффициентом отражения пластины. Имеет место так называемое геометрическое отражение поля точечного источника от пластины, так же как это происходит в неподвижной среде.

Полученному результату нетрудно дать физическое объяснение. Дело в том, что в процессе вычисления двойного интеграла (7) мы воспользовались методом стационарной фазы. Это равносильно тому, что из всего набора плоских волн, составляющих поле точечного источника в движущейся среде, мы учли лишь те волны, приходящие в точку наблюдения, которые имеют одинаковую фазу. Поле в точке наблюдения, в рамках выполненного расчета, состоит из совокупности плоских волн, геометрически отраженных от пластины. Найденное приближенное выражение для отраженного поля над пластиной справедливо при больших значениях R_1. Для того чтобы получить выражение, описывающее поле вблизи от пластины, необходимо в процессе асимптотического вычисления интеграла (7) учесть последующие члены разложения подынтегральной функции в окрестности стационарной точки. Для этого можно воспользоваться соответствующими формулами, полученными, например, в работах [6 и 7]. Вычисления эти довольно громоздки и мы их не приводим.

Мы рассматривали случай, когда скорость распространения изгибных колебаний в пластине всегда мала по сравнению со скоростью звука в движущейся среде. Все рассуждения остаются без существенных изменений, если это ограничение отбросить и в окончательную формулу подставить выражение для коэффициента отражения, свободное от этого ограничения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лямшев. Отражение звука от движущейся тонкой пластины. Акуст. ж., 1960, 6, 4, 505—507.
2. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
3. Л. М. Лямшев. Об одном интегральном представлении поля точечного источника в движущейся среде. Акуст. ж., 1964, 10, 1, 124—126.
4. М. И. Конторович, Ю. К. Муравьев. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи дифракции. Ж. техн. физ., 1952, 22, 3, 394—407.
5. С. С. Войт. Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся. Прикл. мех. и мат., 1953, 13, 157—164.
6. М. М. Тененбаум. К вопросу о методе стационарной фазы. Радиотехн. и электрон., 1960, 5, 12, 1909—1918.
7. D. Jones, M. Keine. Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationare phase. J. Math. phys., 1958, 37, 1, 1—28.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
27 декабря 1966 г.