АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV 1968 Вып. 2

УДК 534.26

К ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ СФЕРАХ

Л. А. Марневская

Методом разделения переменных в сферических координатах решается задача о дифракции плоской акустической волны с единичной амплитудой на двух акустически «мягких» сферах одного и того же радиуса a, расположенных в неограниченной однородной изотропной среде на расстоянии l друг от друга.

В качестве примеров, иллюстрирующих метод, построены графики интенсивности рассеянного поля в волновой зоне в зависимости от изменения сферического угла θ в случаях, когда волна распространяется вдоль линии центров сфер, и нормально к линии центров, при $ka = 1$. Получено приближенное решение задачи, когда расстояние между сферами l намного превосходит длину волны, а радиус сфер a намного меньше длины волны.

Рассмотрим задачу о дифракции плоской скалярной звуковой волны

$$u^0 = e^{ik\,\mathbf{nr}} \tag{1}$$

с единичной амплитудой на двух сферах одного и того же радиуса a, расположенных в неограниченной однородной изотропной среде на расстоянии l друг от друга. Предположим, что волна распространяется в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$, образующего угол α с положительным направлением оси $0z$ координатной системы $0xyz$, с началом в точке 0, лежащим на линии центров шаров посередине между ними. Предположим также, что ось $0z$ совпадает с линией центров шаров, а проекция вектора $\mathbf{n}$ на плоскость $0xy$ образует угол β с положительным направлением оси $0x$ (см. фиг. 1).

В математической постановке задача состоит в определении решения волнового уравнения Гельмгольца

$$\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0 \tag{2}$$

удовлетворяющего на поверхности каждой сферы в сумме с u^0 граничным условиям Дирихле

$$u_1 + u^0 = 0, \qquad r_s = a, \qquad s = \pm 1 \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности.

Здесь $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где ω — круговая частота колебаний, c — скорость распространения волны, λ — длина волны. Граничные условия (3) отвечают случаю акустически «мягких» сфер (в электродинамическом случае сформулированная задача эквивалентна задаче по отысканию потенциала Дебая поля электрического типа).

Задача решается методом разделения переменных в сферических координатах по той же схеме, что и электродинамическая задача, рассмотренная, например, в работе [1], а именно: вводим в рассмотрение локальные сферические координатные системы r_s, θ_s, φ_s, каждая из которых

связана с соответствующей s-ой сферой таким образом, что их начала лежат в центрах сфер, а оси $0z_s$ направлены по оси $0z$ (см. фиг. 1), причем $\varphi_s = \varphi$ ($s = \pm 1$ — номера, приписанные сферам).

В локальных сферических координатах волна (1) может быть представлена в виде ряда

$$u^0 = e^{ik(\mathbf{n}\mathbf{r}_{0s})} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} i^n \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} e^{-im\beta} P_n^m(\cos\alpha) \times$$
$$\times J_n(kr_s) P_n^m(\cos\theta_s) e^{im\varphi}, \tag{4}$$

по сферическим волновым функциям (при этом учитывается, что в выражении (1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{0s}$, где $\mathbf{r}_{0s}$ — радиус-вектор, соединяющий точку 0 с точкой 0_s, $s = \pm 1$). Здесь $j_n(kr)$ — сферическая бесселева функция 1-го рода, $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Решение задачи (функцию u_1) мы будем искать в виде рядов по локальным сферическим волновым функциям, удовлетворяющим условиям излучения на бесконечности:

$$u_1 = \sum_{s=\pm 1} u^{(s)}, \tag{5}$$

где

$$u^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} x_{mn}^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) P_n^m(\cos\theta_s) e^{im\varphi}, \tag{6}$$

$h_n^{(1)} kr_s$ — сферическая бесселева функция 3-го рода.

Для отыскания коэффициентов разложения $x_{mn}^{(s)}$ ($s = \pm 1$) из граничных условий (3), применяется теорема сложения для сферических волновых функций [2]:

$$h_n^{(1)}(kr_s) P_n^m(\cos\theta_s) = \sum_{q=|m|}^{\infty} Q_{mqmn}^{(1)}(r_{sj}, \theta_{sj}) j_q(kr_j) P_q^m(\cos\theta_j), \tag{7}$$

где

$$Q_{mqmn}^{(1)}(r_{sj}, \theta_{sj}) = \frac{2i^{q-n}}{N_{mq}} \sum_{\sigma=(q-n)}^{q+n} i^\sigma b_\sigma^{(qmnm)} h_\sigma^{(1)}(kr_{sj}) P_\sigma(\cos\theta_{sj}). \tag{8}$$

Здесь r_{sj}, θ_{sj} — сферические координаты начала 0_j в системе координат с началом в точке 0_s, коэффициенты $b_\sigma^{(qmnm)}$ определены через коэффициенты Клебша — Гордана, например, в работе [2]. Далее,

$$N_{mn} = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \qquad r_{-11} = r_{1-1} = l = 2l_0; \quad \theta_{-1,1} \equiv 0; \quad \theta_{1,-1} = \pi.$$

В результате, после замены неизвестных $x_{mn}^{(s)}$ ($s = \pm 1$) на новые $X_{mn}^{(s)}$ по формуле

$$x_{mn}^{(s)} = j_n(ka) X_{mn}^{(s)}, \qquad s = \pm 1 \tag{9}$$

для неизвестных $X_{mn}^{(s)}$ получаются бесконечные системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} X_{mn}^{(-1)} - \sum\limits_{q=|m|}^{\infty} A_{mnmq}^{(-1)} X_{mq}^{(1)} = a_{mn}^{(-1)} \\ \\ X_{mn}^{(1)} - \sum\limits_{q=|m|}^{\infty} A_{mnmq}^{(1)} X_{mq}^{(-1)} = a_{mn}^{(1)} \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots \infty; \ |m| \leqslant n) \tag{10}$$

с матричными элементами

$$A_{mnmq}^{(-1)} = -Q_{mnmq}^{(1)}(2l_0, \pi)\frac{j_q(ka)}{h_n^{(1)}(ka)},$$
$$A_{mnmq}^{(1)} = -Q_{mnmq}^{(1)}(2l_0, 0)\frac{j_q(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \tag{11}$$

и с правыми частями

$$a_{mn}^{(s)} = -\frac{2i^n}{N_{mn}} e^{i(_s kl_0 \cos\alpha - m\beta)} P_n^{(m)}(\cos\alpha)\frac{1}{h_n^{(1)}(ka)} \quad (s = \pm 1). \tag{12}$$

Система (10) подобна изученным, например, в работе [1]. Она обладает для каждого m вполне непрерывной формой в координатном гильбертовом пространстве l^2, которому принадлежат и ее правые части. Система (10) единственным образом разрешима методом усечений. Ее решение принадлежит l^2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |X_{mn}^{(s)}|^2 < \infty. \tag{12'}$$

Определением коэффициентов разложения формально заканчивается решение задачи (можно показать, что при условии (12′) решение задачи действительно существует в форме (5). Приближенные значения коэффициентов $X_{mn}^{(s)}$ $(s = \pm 1\ n = 0, 1, \ldots, N;\ |m| \leqslant n)$ для каждого m могут быть найдены с заданной степенью точности из конечных систем

$$\begin{cases} X_{mn}^{(-1)} = \sum\limits_{q=|m|}^{N} A_{mnmq}^{(-1)} X_{mq}^{(1)} + a_{mn}^{(-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots, N|m| \leqslant n) \\ X_{mn}^{(1)} = \sum\limits_{q=|m|}^{N} A_{mnmq}^{(1)} X_{mq}^{(-1)} + a_{mn}^{(1)}, \end{cases} \tag{13}$$

получаемых из системы (10) усечением для последовательно возрастающих значений N (путем сравнения их решений). В каждом случае (для каждого N) нужно решить, очевидно, $2N + 1$ систем уравнений вида (13), состоящих из $2(N - |m| + 1)$ уравнений с $2(N - |m| + 1)$ неизвестными $(|m| \leqslant n, n = 0, 1, \ldots, N)$.

Матричные элементы системы (13) для $s = \pm 1$ связаны между собой соотношением

$$A_{mnmq}^{(1)} = (-1)^{n+q} A_{mnmq}^{(-1)}, \tag{14}$$

а ее правые части $a_{mn}^{(s)}$ $(s = \pm 1)$ обладают свойствами: при $\alpha = 0$, $a_{0n}^{(s)} \neq 0$ и $a_{mn}^{(s)} = 0$ при $m \neq 0$, при $\alpha = \pi/2$, $a_{mn}^{(s)} \neq 0$, если $(n - m)$ — четное число, $a_{mn}^{(s)} = 0$, если $(n - m)$ — нечетное число, $(s = \pm 1)$, что следует из соответствующих свойств присоединенной функции Лежандра.

Порядок системы (13) может быть понижен вдвое на основе преобразований, подобных приведенным в работе [1]. А именно, положим

$$\varphi_{mn} = X_{mn}^{(-1)} + (-1)^{n+1} X_{mn}^{(1)},\ \psi_{mn} = X_{mn}^{(-1)} + (-1)^n X_{mn}^{(1)},$$
$$A_{mn} = a_{mn}^{(-1)} + (-1)^{n+1} a_{mn}^{(1)};\ B_{mn} = a_{mn}^{(-1)} + (-1)^n a_{mn}^{(1)}. \tag{15}$$
$$(n = 0, 1, \ldots, N;\ |m| \leqslant n|.$$

Тогда, складывая и вычитая почленно уравнения (13), мы получим в новых обозначениях две независимые друг от друга системы:

$$\begin{cases} \varphi_{mn} + \sum\limits_{q=|m|}^{N} (-1)^q A^{(-1)}_{mnmq} \varphi_{mq} = A_{mn} \\ \psi_{mn} - \sum\limits_{q=|m|}^{N} (-1)^q A^{(-1)}_{mnmq} \psi_{mq} = B_{mn} \\ \qquad (n = 0, 1, \ldots, N; \ |m| \leqslant n). \end{cases} \tag{16}$$

Система (16) существенным образом упрощается для некоторых частных значений угла α. Так, при $\alpha = 0$ система (16) принимает вид

$$\begin{cases} \varphi_{0n} + \sum\limits_{q=0}^{N} (-1)^q A^{(1)}_{0n0q} \varphi_{0q} = A_{0n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots, N) \\ \psi_{0n} - \sum\limits_{q=0}^{N} (-1)^q A^{(-1)}_{0n0q} \psi_{0q} = B_{0n}. \end{cases} \tag{17}$$

Аналогичного вида система получится при $\alpha = \pi$. В случае, когда $kl \gg 1$, из системы (10) тем же путем, что и, например, в работе [1] в аналогичной ситуации, для приближенного определения коэффициентов $X^{(s)}_{mn}$ $(s = \pm 1)$ можно получить формулы:

$$X^{(-1)}_{0n} \approx a^{(-1)}_{0n} + \frac{A^{(-1)}_n (C + AB)}{1 - A^2}; \ X^{(1)}_{0n} \approx a^{(1)}_{0n} + \frac{A^{(1)}_n (B + AC)}{1 - A^2}, \tag{18}$$

$$X^{(s)}_{mn} = a^{(s)}_{mn} \qquad (m \neq 0, \ s = \pm 1),$$

где

$$A^{(-1)}_n = \frac{(2n+1) i^{3n+1} e^{2ikl_0}}{2kl_0 \cdot h^{(1)}_n(ka)}, \quad A^{(1)}_n = (-1)^n A^{(-1)}_n,$$

$$A = \frac{e^{2ikl_0}}{2kl_0} \sum_{q=0}^{\infty} (2q+1) i^{2q+1} \frac{j_q(ka)}{h^{(1)}_q(ka)},$$

$$B = -e^{-kl_0 \cos\alpha} \sum_{q=0}^{\infty} (2q+1) P_q(\cos\alpha) \frac{j_q(ka)}{h^{(1)}_q(ka)}, \tag{19}$$

$$C = e^{kl_0 \cos\alpha} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^{q+1} (2q+1) P_q(\cos\alpha) \frac{j_q(ka)}{h^{(1)}_q(ka)}.$$

Если, кроме того, еще и $ka \ll 1$, то, подставив выражения (18) в формулу (5), на основании формул

$$j_n(x) \underset{x \to 0}{\to} \frac{2^n n! x^n}{(2n+1)!}; \quad h^{(1)}_n(x) \underset{x \to 0}{\to} -\frac{i(2n)!}{2^n n! x^{n+1}},$$

мы получим в приближении волновой зоны, в координатах с началом в точке 0

$$u_1 \approx -\frac{e^{ikr}}{kr}\{2ka\cos[kl_0(\cos\theta-\cos\alpha)]-$$

$$-\frac{(ka)^2 e^{2ikl_0}}{kl_0}\cos[kl_0(\cos\theta+\cos\alpha)]\} \qquad (20)$$

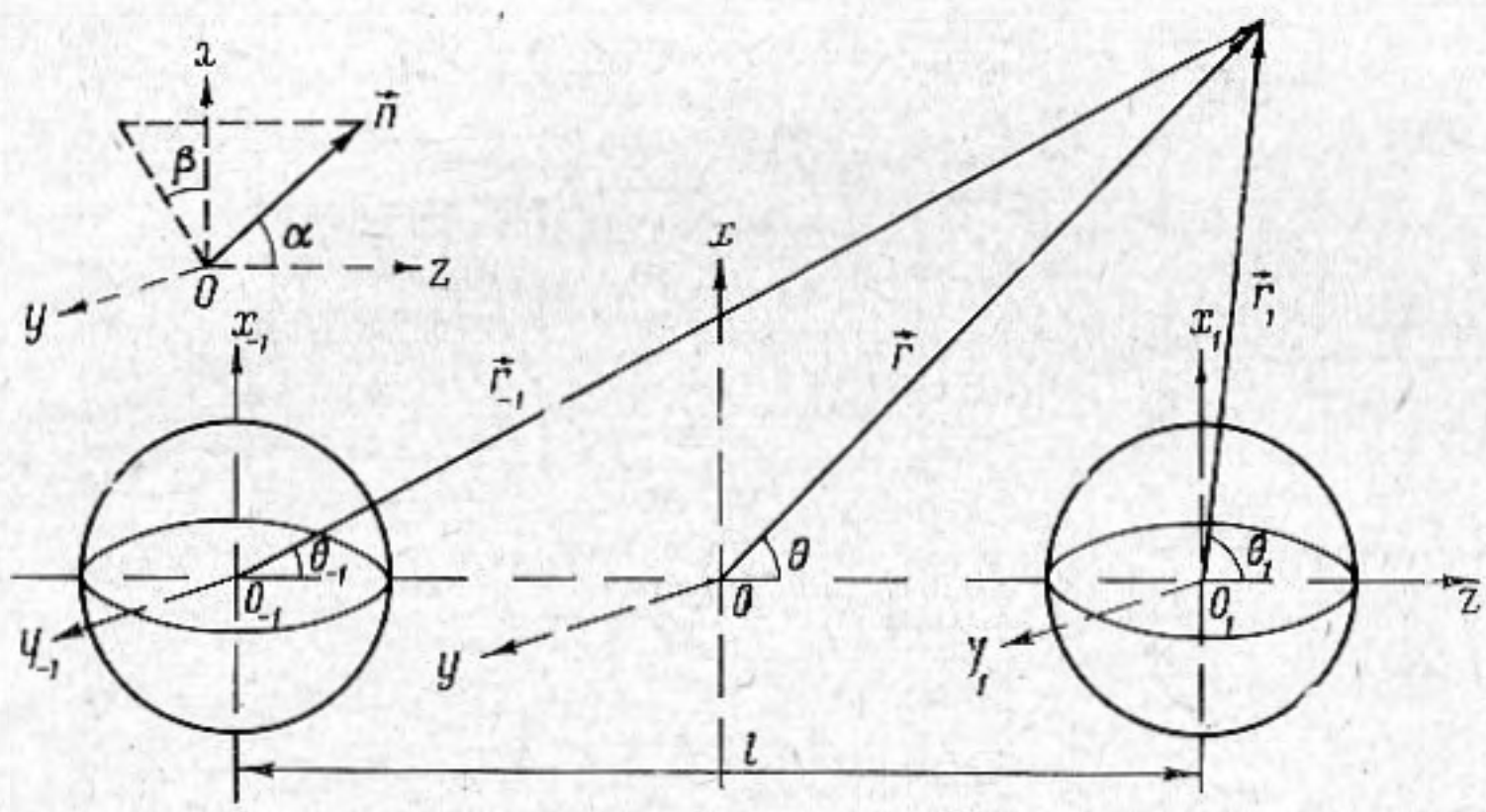
(мы пренебрегаем слагаемыми, содержащими $(ka)^n$, где $n > 2$).

В общем случае, в приближении волновой зоны, в координатах с началом в точке 0

$$u_1 \approx \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}(-i)^{n+1}P_n^m(\cos\theta)j_n(ka)e^{im\varphi}\times$$

$$\times[(X_{mn}^{(-1)}+X_{mn}^{(1)})\cos(kl_0\cos\theta)+i(X_{mn}^{(-1)}-X_{mn}^{(1)})\sin(kl_0\cos\theta)]. \qquad (21)$$

Интенсивность рассеянного поля в каждой точке волновой зоны определится как $|u_1|^2$. Полученные формулы пригодны для численных расчетов интенсивности рассеянного поля.



Фиг. 1

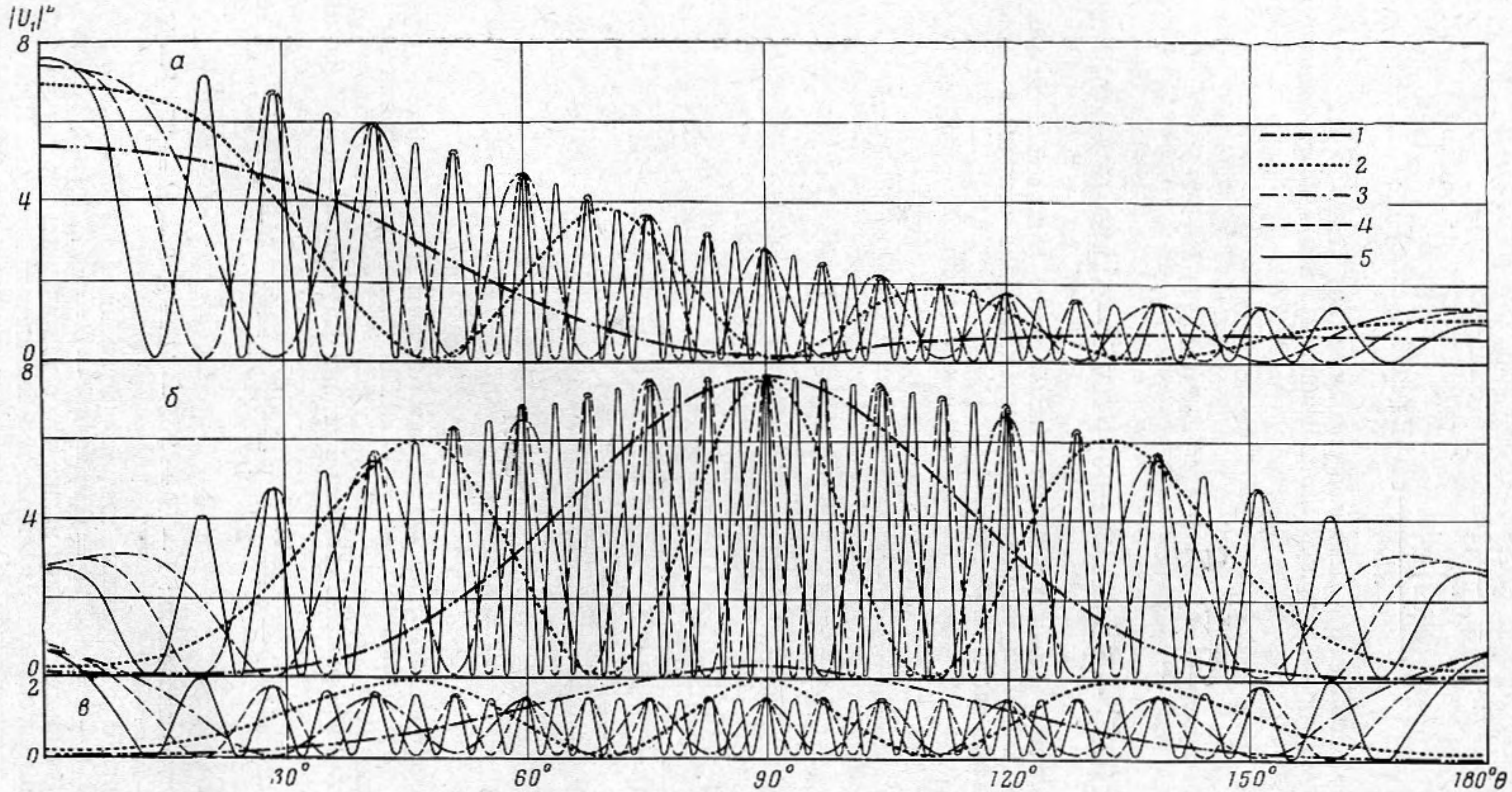
В качестве иллюстрации метода, ниже на фиг. 2, 3 приводятся графики функции $|u_1|^2$ в зависимости от изменения угла θ, для значения $ka = 1$ и различных kl.

На фиг. 2 изображены графики функции $|u_1|^2$ при $a-\alpha=0$ (симметричный случай), $b-\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=0$, $\varphi=0$; $b-\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\beta=0$, $\varphi=\pi$

и условных обозначениях: *1* — $kl = 3$, *2* — $kl = 9$, *3* — $kl = 25$, *4* — $kl = 50$, *5* — $kl = 100$.

На фиг. 3 изображены графики функции $|u_1|^2$ при $kl = 200$ и *а* — $\alpha = 0$, *б* — $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $\varphi = 0$, *в* — $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $\varphi = \pi$.

Из полученных графиков видно, что с увеличением расстояния между сферами интенсивность рассеяния все больше осциллирует. При $\alpha = 0$, т. е. если плоская волна (1) распространяется вдоль оси $0z$, наибольшее значение $|u_1|^2$ достигается в главном направлении ($\theta = 0$), причем это



Фиг. 2

Фиг. 3

значение возрастает при увеличении kl и стремится к интенсивности рассеяния, создаваемого двумя независимыми «мягкими» сферами радиуса a в том же направлении $\theta = 0$. Интенсивность рассеяния возрастает при переходе из освещенной области ($\pi \geqslant \theta \geqslant \pi/2$) в область геометрической тени ($\pi/2 > \theta \geqslant 0$).

Если же плоская волна (1) распространяется вдоль положительного направления оси $0x$ ($\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$), то для $\varphi = 0$ максимальное, а для $\varphi = \pi$ минимальное значение $|u_1|^2$ достигаются при $\theta = \pi/2$. Интенсивность рассеяния возрастает при переходе из освещенной области ($\varphi = \pi$) в область геометрической тени ($\varphi = 0$). График $|u_1|^2$ имеет в этом случае ось симметрии, проходящую через точку $\theta = \pi/2$.

Подобным же образом можно решить задачу в случае, когда функция u_1 удовлетворяет на поверхности каждой сферы граничным условиям Неймана (этот случай, очевидно, будет отвечать акустически «жестким» сферам, а в электродинамике — задаче по отысканию потенциала Дебая поля магнитного типа).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов. Рассеяние плоской электромагнитной волны на нескольких сферах. Диф. уравнен., 1966, 2, 6, 828—846.
2. Е. А. Иванов. Теорема сложения для элементарных функций сфероидальных волн. Докл. АН БССР, 1960, 4, 1, 3—6.

Институт математики
АН Белорусской ССР

Поступила в редакцию
17 января 1967 г.