УДК 534.87

ОЦЕНКА ШИРИНЫ МАКСИМУМА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЯ СИГНАЛА ПО ВЕЛИЧИНЕ РАДИУСА ПОПЕРЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

А. М. Резник

При исследовании параметров рассеяния сигнала, распространяющегося в флюктуирующей среде, обычно производится измерение ковариантной функции сигнала в плоскости фронта волны (поперечная корреляция поля сигнала). Нормированная ковариантная функция при этом имеет максимум в точке $r = 0$ и более или менее быстро спадает при увеличении расстояния между приемниками. Величина r^*, для которой ковариантная функция падает в e раз по сравнению с ее значением в точке $r = 0$, называется радиусом корреляции рассеянного сигнала. Для сигнала, рассеянного волнующейся поверхностью моря, величина r^* по данным работы [1] составляет от $3 \div 5$ до 120 длин волн излученного сигнала в диапазоне частот $4 \div 15$ *кгц*.

Во многих случаях такая форма представления данных оказывается неудобной и необходимо знать спектральные функции поля рассеянного сигнала. Переход от пространственной ковариантной функции к спектральной функции поля может быть выполнен с помощью преобразования Фурье, однако, как правило, мы не располагаем достаточно полными данными о ковариантной функции (измерения обычно проводятся в одной плоскости и охватывают небольшой диапазон изменения r). Кроме того, сама техника вычисления преобразования Фурье неоправданно сложна для тех случаев, когда необходима приближенная оценка параметров поля в виде ширины основного максимума спектральной функции поля рассеянного сигнала.

Полагая, что энергия рассеянного сигнала сконцентрирована в пределах сравнительно узкого сектора, представим спектральную функцию поля в виде

$$\Phi(\mathbf{k}) = \Phi_0 \exp - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| / 2a^2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $|\mathbf{k}| = \omega / c$; вектор $\mathbf{k}_0$ совпадает с направлением на источник сигнала. Показатель степени в этом выражении удобно принять в виде

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|^2/2a^2 = \frac{1}{u}(1 - \cos\theta_k); \quad u = \frac{a^2c^2}{\omega^2}.$$

Шириной основного максимума спектральной функции назовем величину угла θ_k^*, для которого $\Phi(\mathbf{k}) = \Phi_0 e^{-1}$. Очевидно, что $\cos\theta_k^* = 1 - u$.

Найдем вид ковариантной функции сигнала в плоскости, перпендикулярной направлению на источник. Для этого воспользуемся формулой спектрального представления ковариантной функции

$$b(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{k})\, e^{-j\mathbf{kr}} \sin\theta_k\, d\theta_k\, d\beta_k.$$

Используя представление

$$\mathbf{kr} = \frac{\omega r}{c}[\cos\theta_k \cos\theta_r + \sin\theta_k \sin\theta_r \cos(\beta_k - \beta_r)]$$

и полагая $\theta_r = \pi / 2$, найдем

$$b(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-1/u(1-\cos\theta_k) + j\omega r/c \sin\theta_k \cos(\beta_k - \beta_r)} \sin\theta_k\, d\theta_k\, d\beta_k =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-/1u} \int_0^{\pi} e^{1/u \cos\theta_k} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\sin\theta_k\right)^{-1} \sin\theta_k\, d\theta_k,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя 0-го порядка. Этот интеграл приводится к табличному [2]:

$$\int_0^{\pi} e^{jz\cos\theta\cos\varphi} J_0(z\sin\theta\cdot\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \sqrt{2\pi/z}\, J_{1/2}(z)$$

с помощью подстановки

$$\frac{1}{u} = jg \cdot \cos v, \quad \frac{\omega r}{c} = g \cdot \sin v, \quad g = \sqrt{\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - \frac{1}{u^2}}.$$

Вычисляя интеграл, найдем

$$b(\omega, r) = e^{-1/u} \frac{\sin \sqrt{\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - \frac{1}{u^2}}}{\sqrt{\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - \frac{1}{u^2}}}. \tag{2}$$

Нормируя полученную ковариантную функцию относительно ее значения в точке $r = 0$, получим

$$b(\omega, r) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{u}\sqrt{\omega^2 r^2 u^2/c^2 - 1}\right)}{\sqrt{u^2\omega^2 r^2/c^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{u}}, & r > c/\omega u \\[2ex] \dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{u}\sqrt{\omega^2 r^2 u^2/c^2 - 1}\right)}{\sqrt{u^2\omega^2 r^2/c^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{u}}, & r < c/\omega u. \end{cases} \tag{3}$$

На практике угол θ^*, как правило, не очень велик и поэтому $u \ll 1$, что позволяет считать $r < c/\omega u$. При этом оказывается справедливым приближенное выражение:

$$b(\omega, r) \approx e^{\frac{1}{u}(\sqrt{\omega^2 r^2 u^2/c^2 - 1} - 1)} \tag{4}$$

Полагая $\Phi(\mathbf{k}) / \Phi_0 = e^{-1}$, найдем величину θ^*. Приравнивая $1/u\,(\sqrt{\omega^2 r^2 u^2/c^2 - 1} - 1) = -1$, найдем $u = \dfrac{1}{(1 \pm \omega r/c)}$.

Отсюда получаем искомое выражение, связывающее ширину главного максимума спектральной функции с радиусом поперечной корреляции рассеянного сигнала r^*

$$\cos\theta^* = \frac{\omega r^*/c}{1 + \omega r^*/c} = \frac{2\pi r^*}{\lambda + 2\pi r^*}. \tag{5}$$

Эта формула может быть еще более упрощена, если $r^*/\lambda \geqslant 10$. Разлагая в степенные ряды правую и левую части выражения (5), получим

$$\theta^* \simeq 46\sqrt{\lambda / r^*}, \tag{6}$$

где λ — длина волны сигнала, θ^* — в градусах.

Подставляя в формулу (5) экспериментальные данные работы [1], мы находим следующие значения для θ^*: при $r^*/\lambda = 120$ $\theta^* = 3°$; при $r^*/\lambda = 4$, $\theta^* = 15°$. Приближенное выражение для этих значений дает 3° и 23° соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. П. Гулин, К. И. Малышев. Некоторые опыты по изучению пространственной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы звуковых сигналов, отраженных от волнующейся поверхности моря. Акуст. ж., 1964, 10, 4, 425—430.
2. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М., ИЛ, 1960.

Киев

Поступила в редакцию
6 июня 1967 г.