АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 2

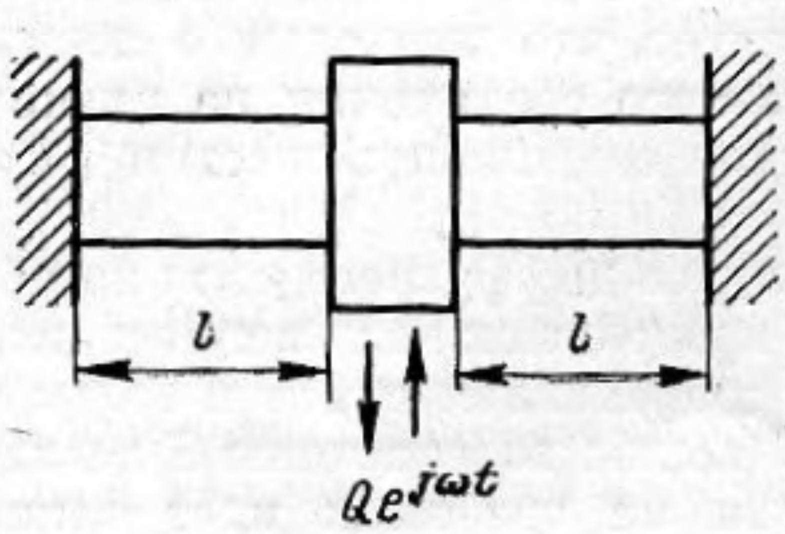
УДК 534.8.081.7

# КОЭФФИЦИЕНТ ФОРМЫ ОБРАЗЦА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДУЛЯ СДВИГА

*Г. С. Росин*

Решается задача вычисления модуля сдвига при испытании цилиндрических и квадратных призматических образцов, с учетом неравномерного распределения касательных напряжений и влияния нормальных напряжений. Показано, что при длине образца, в два раза меньшей его поперечных размеров, влиянием нормальных напряжений можно пренебречь. При этом можно использовать формулы сопротивления материалов, увеличив получаемый с их помощью результат на 17,5% для цилиндрического и на 20% для призматического образцов. Приводится формула для вычисления коэффициента Пуассона.

При определении динамических и статических модулей сдвига обычно считают, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению [1], т. е. что образец подвергается чистому сдвигу. Фактически же касательные напряжения к краям образца уменьшаются. Кроме того, при сдвиговых деформациях образец изгибается и кроме касательных в нем возникают также и нормальные напряжения. С увеличением длины образца вклад нормальных напряжений может превзойти вклад касательных напряжений. Есть лишь одна работа [2], в которой рассматривается потенциальная энергия призматического образца с учетом неравномерного распределения касательных напряжений, однако формул для вычисления динамических модулей сдвига в этой работе не приводится. Ниже дан вывод формул для вычисления динамических (а также статических) модулей сдвига по результатам измерения сдвиговой жесткости.




Фиг. 1

При измерениях динамических модулей сдвига обычно испытывают одновременно два образца, как это изображено на фиг. 1. Очевидно, что деформация двух образцов длиною $l$ по схеме, приведенной на фиг. 1, идентична изгибной деформации жестко защемленного бруса длины $2l$, имеющего то же поперечное сечение, что и испытуемые образцы, под действием силы, приложенной в середине бруса (фиг. 2, *а*).

Как и в работе [3], будем считать, что измерение производится на частотах $f \leqslant c_п / 10l$ ($c_п$ — скорость поперечных волн в образце), когда можно пренебречь волновыми свойствами образца. В этом случае решение задачи можно проводить для статического режима, пренебрегая силами инерции в образце. В дальнейшем решении мы будем рассматривать только левую половину бруса, учитывая, что в силу симметрии сказанное для левой половины верно и для правой половины.

Известно [4] решение Сен-Венана задачи об изгибе консольно закрепленного призматического бруса. На первых этапах наших выводов воспользуемся методом Сен-Венана в интерпретации Тимошенко [5]. Следуя Сен-Венану, примем, что нормальные напряжения по сечению пропорциональны изгибающему моменту и распределяются таким же образом, как при чистом изгибе. Так как изгибающий момент от силы $P$ для левой половины защемленного бруса равен [6]

$$M_z = -\frac{P}{4}(l-2z), \tag{1}$$

то напряжение будет

$$\sigma_z = -\frac{P(l-2z)x}{4J}, \tag{2}$$

где $J$ — момент инерции поперечного сечения бруса. Далее будем считать, что существуют лишь касательные напряжения $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$, а остальные составляющие напряжений $\sigma_x \sigma_y$ и $\tau_{xy}$ равны нулю.

При таких предположениях дифференциальные уравнения равновесия, условия на поверхности и уравнения непрерывности [5] принимают вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{Px}{2J}, \tag{4}$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = -\frac{P}{2J(1+\mu)}, \tag{6}$$

где (фиг. 2, *б*)

$$l = \cos(N, x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(N, y) = -\frac{dx}{ds} \tag{7}$$

и $\mu$ — коэффициент Пуассона.

Уравнениям равновесия (3) и (4) удовлетворяют напряжения

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Px^2}{4J} + f(y), \tag{8}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{9}$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ — функция напряжения, $f(y)$ — произвольная функция.

Внеся выражение (8) и (9) в уравнения совместности (6) и интегрируя, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{Py}{2J} - \frac{df}{dy}. \tag{10}$$

В уравнении (10) опущена произвольная постоянная, так как можно показать [7], что при сечении образца, симметричном относительно плоскости $xoz$, ее следует положить равной нулю.

Внося формулы (8) и (9) в условие на контуре (5), с учетом выражений (7), находим

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} = \left[\frac{Px^2}{4J} - f(y)\right]\frac{dy}{ds}. \tag{11}$$

В дальнейшем мы будем выбирать функцию $f(y)$ такой, чтобы производная $d\varphi/ds$ на контуре обращалась в нуль. Следовательно, функция напряжений на контуре сечения должна иметь постоянное значение. Будем считать, что функция напряжений на контуре равна нулю. Уравнение (10) вместе с условием (11) определяет функцию напряжений $\varphi(x, y)$.

Рассмотрим деформацию образца круглого сечения радиусом $R$, контур которого задается уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Правая часть условия (11) обращается в нуль, если принять

$$f(y) = \frac{P}{4J}(R^2 - y^2). \tag{12}$$