УДК 534.26

# ОБ УСИЛЕНИИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ТОНКИМ УПРУГИМ ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ СЛОЕМ

*Л. М. Лямшев*

В работе [1] было показано, что прошедшая через тонкую пьезополупроводниковую пластину звуковая волна в непроводящей жидкости может усиливаться, если выполняются условия так называемого пространственного резонанса для изгибных колебаний в пластине и скорость дрейфа носителей заряда в пьезополупроводнике будет несколько выше скорости распространения изгибных колебаний. Ниже, на примере плоской задачи, рассматривается более общий случай, когда в пластине возникают наряду с изгибными, продольные колебания, или так называемые поперечные колебания сжатия [2].

Напишем уравнение поперечных колебаний сжатия тонкой пьезополупроводниковой пластины. Рассмотрим пластину толщиной $2h$ из кристалла гексагональной симметрии, например CdS, расположенную в координатной плоскости $x_2Ox_3$. Уравнения пьезоэффекта имеют вид

$$\sigma_{kl} = c_{ijkl}u_{ij} - e_{mkl}E_m, \qquad D_n = \varepsilon_{mn}E_m + e_{nij}u_{ij}, \qquad D_{i,i} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{kl}$ — напряжения, $u_{ij}$ — деформации, $D_n$, $E_m$ — соответственно компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля, $c_{ijkl}$, $\varepsilon_{mn}$, $e_{nij}$ — упругие, диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные.

Для колебаний пластины в жидкости справедливы соотношения:

$$\sigma_{33,3} = \rho_s\ddot{u}_3, \tag{2}$$

$$\sigma_{11} = -p, \qquad x_1 = \pm h, \tag{3}$$

где $\rho_s$ — плотность материала пластины и $p$ — давление, действующее на пластину со стороны жидкости. В рассматриваемом случае отлична от нуля только компонента $E_3$ электрического поля. Пользуясь уравнениями (1) и (3) и проводя те же рассуждения, что и в работе [2], мы получаем

$$\ddot{u}_1 - a^2u_{1,33} = \pm c_{33}^0h[(q^{02}-1)\ddot{p} + a^2p_{,33}], \tag{4}$$

где $a^2 = [c_{11}^0\rho_s]^{-1}$ — квадрат скорости распространения продольных колебаний в пьезополупроводниковой пластине,

$$c_{11}^0 = \frac{c_{11}'}{c_{11}'c_{33}' - c_{13}'^2}, \qquad c_{33}^0 = \frac{c_{33}'}{c_{11}'c_{33}' - c_{13}'^2}, \qquad q_1^{02} = \frac{c_{13}'^2}{c_{11}'c_{33}'}$$

$$c_{11}' = c_{11}\left(1 + \frac{4\pi e_{13}^2}{\varepsilon c_{11}}\right), \quad c_{13}' = c_{13}\left(1 + \frac{4\pi e_{13}e_{33}}{\varepsilon c_{13}}\right), \quad c_{33}' = c_{33}\left(1 + \frac{4\pi e_{33}^2}{\varepsilon c_{33}}\right),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{33}.$$

Для простоты рассуждений в дальнейшем удобно воспользоваться, как это иногда принято, предположением о квазиизотропности упругих свойств кристалла и положить

$$c_{11} \approx c_{33} = \frac{N(1-q)}{(1-2q)(1+q)}, \quad c_{13} = \frac{Nq}{(1-2q)(1+q)}, \quad e_{33} = -2e, \quad e_{13} = e,$$

где $N$ — модуль Юнга и $q$ — коэффициент Пуассона. В этом случае мы получаем для $q_1^{02}$ и $a^2$ — выражения: $q_1^{02} \approx q_1^2 = \dfrac{q^2}{(1-q)^2}$, $a^2 \approx a_0^2(1+\delta)$, где $\delta = 4K_L^2\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon(\omega, k_x)}$,

$a_0 = \left[\dfrac{N}{(1-q^2)\rho_s}\right]^{1/2}$ — скорость продольных колебаний в изотропной пластине,

$K_L = \left[\dfrac{4\pi e^2(1-q_1^2)}{\varepsilon_0\rho_s a_0^2}\right]^{1/2}$ — электромеханическая постоянная и $\varepsilon_0$ — статическое значение диэлектрической проницаемости.

Пусть на пластину падает плоская монохроматическая звуковая волна. Предполагается, что пластина под действием звуковой волны совершает изгибные колебания и поперечные колебания сжатия. Для звукового давления в нижнем и верхнем полупространстве напишем

$$p_1(x_1, x_3) = \exp[ik_{x_1}x_1 + ik_{x_3}x_3] + A\exp[-ik_{x_1}x_1 + ik_{x_3}x_3], \qquad x_1 < -h,$$
$$p_2(x_1, x_3) = B\exp[ik_{x_1}x_1 + ik_{x_3}x_3], \qquad x_1 > +h.$$

Множитель $\exp(-i\omega t)$ как обычно опускаем.

Решая краевую задачу, получим для коэффициентов отражения $A$ и прохождения $B$ выражения [2]:

$$A = \frac{ZZ_1(k^2 - k_x^2) - 2\rho^2\omega^2}{(Z_1\sqrt{k^2 - k_x^2} + \rho\omega)(Z\sqrt{k^2 - k_x^2} + 2\rho\omega)}, \tag{5}$$

$$B = \frac{\rho\omega(2Z_1 - Z)\sqrt{k^2 - k_x^2}}{(Z_1\sqrt{k^2 - k_x^2} + \rho\omega)(Z\sqrt{k^2 - k_x^2} + 2\rho\omega)}, \tag{6}$$

где $Z$ и $Z_1$ — импеданцы пластины для изгибных и поперечных колебаний сжатия

$$Z_1 = i\frac{N}{\omega h(1 - q_1^2)}\frac{k_a^2 - k_x^2}{(1 - q^2)k_a^2 - k_x^2}, \tag{7}$$

$\rho$ — плотность жидкости, $c$ — скорость звука в жидкости, $k_x \equiv k_{x_3}$. Выражение для импеданца $Z$ выписывать не будем, и в дальнейшем подробно остановимся на анализе роли поперечных колебаний сжатия пластины в формировании акустического поля в жидкости.

Рассмотрим уравнение

$$Z_1\sqrt{k^2 - k_x^2} + \rho\omega = 0.$$

Его удобно переписать в виде

$$[k_{a0}^2 - k_x^2(1 + \delta)]\sqrt{k^2 - k_x^2} = i\mu k[(1 - q_1^2)k_{a0}^2 - k_x^2(1 + \delta)], \tag{8}$$

где $\mu$ — безразмерный параметр $\mu = h(1 - q_1^2)\rho\omega cN^{-1}$.

Нетрудно видеть, что практически всегда $\mu \ll 1$, $\delta \ll 1$. Имея это в виду, будем решать уравнение (8) методом последовательных приближений. Нулевое приближение дает $k_x = k_{a0}$, далее, полагая $k_x = k_{a0} + \alpha$, найдем

$$\alpha \approx -\frac{1}{2}k_{a0}\delta + i\frac{1}{2}k_{a0}\mu\frac{q_1^2 k}{\sqrt{k^2 - k_{a0}^2}}. \tag{9}$$

Для мнимой части $\delta$ имеем

$$\operatorname{Im}\delta = 4K_L^2\varepsilon_0 \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega, k_x)]^{-1}. \tag{10}$$

Если рассматривать не очень тонкие пластины, то, следуя работе [3], можно положить

$$\varepsilon(\omega, k_x) = \varepsilon_0 - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega}\frac{1}{1 - \beta + \dfrac{ik_x^2 v_T^2}{\omega\nu}}, \tag{11}$$

где $\sigma_0 = e^2 n_0 / m\nu$ — проводимость по постоянному току (здесь и далее $e$ — заряд электрона), $\beta = v_= / a_0$, $v_=$ — скорость дрейфа носителей заряда под действием постоянного поля, $E_=$, $v_T = (2\varkappa T_e / m)^{1/2}$ — тепловая скорость носителей, $\nu$ — частота соударений и $n_0$ — концентрация носителей заряда.

Из соотношений (10) и (11) находим

$$\operatorname{Im}\delta = -4K_L^2\varepsilon_0\frac{\dfrac{\omega_0^2}{\omega\nu}(1 - \beta)}{\varepsilon_0^2(1 - \beta)^2 + \dfrac{\omega_0^4}{\omega^2\nu^2}\left[1 + \varepsilon_0\dfrac{2\omega^2 r_0^2}{a_0^2}\right]^2}, \tag{12}$$

где $\omega_0 = (4\pi e^2 n_0 / m)^{1/2}$ — плазменная частота носителей и $r_0 = (\varkappa T_e / 4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ — дебаевский радиус.

Из последнего выражения видно, что при $\beta > 1$ знак мнимой части $\delta$ меняется на обратный и при некотором $\beta = \beta_{\text{кр}} > 1$ может оказаться, что $\operatorname{Im}\alpha = 0$. В этом случае $k_x$ принимает вещественное значение, а коэффициенты отражения $A$ и прохождения $B$ оказываются больше единицы. Усиление ультразвуковых колебаний в жидкости может произойти при условии $k_x \approx k_{a0}$ (условие пространственного резонанса для продольных колебаний в пластине, см. работу [2]) и при $\beta = \beta_{\text{кр}} > 1$, т. е. когда скорость дрейфа носителей заряда больше скорости распространения продольных колебаний в пластине.

Рассматривая уравнение $Z\sqrt{k^2 - k_x^2} + 2\rho\omega = 0$, получим, как это уже сделано в работе [1], что усиление колебаний в жидкости может происходить и в том случае, если выполняется условие пространственного резонанса для изгибных колебаний в пластине и скорость дрейфа носителей заряда больше скорости изгибных колебаний. Более подробный анализ выражений (5) и (6) показывает, что возможно также усиление поверхностных волн в жидкости, в частности, обусловленных изгибными колебаниями пластины, когда скорость этих колебаний мала по сравнению со скоростью звука в жидкости.

В заключение заметим, что экспериментально, по-видимому, легче осуществить усиление ультразвуковых колебаний в жидкости при выполнении условия пространственного резонанса для продольных колебаний пластины, так как потери на излучение в среду в этом случае значительно меньше, чем в случае изгибных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. М. Лямшев. Прохождение звука через пьезополупроводниковую пластину в жидкости. Акуст. ж., 1968, 14, 3, 474—476.
2. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
3. В. И. Пустовойт, М. Е. Герценштейн. О возможности усиления изгибных волн. Физ. тверд. тела, 1964, 6, 3, 879—887.



Акустический институт АН СССР
Москва



Поступило в редакцию
24 февраля 1969 г.



УДК 534.222


# ОБ ИЗМЕНЕНИИ СПЕКТРА НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ


*Б. И. Максимов*


В работе [1] рассматривалось во втором приближении изменение спектра периодического сигнала, распространяющегося в идеальной среде. Представляет интерес исследовать изменение спектра непериодического сигнала при его прохождении через диссипативную среду.

Будем исходить из уравнения, которое описывает распространение волн конечной амплитуды в диссипативной среде в квадратичном приближении [2, 3]

$$\frac{\partial v}{\partial z} = bv\frac{\partial v}{\partial \tau} + \delta\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2},$$

где $v$ — скорость, $z = kx$, $\tau = \omega t - kx$, $\omega = kc_0$,

$$b = \frac{\gamma+1}{2c_0}, \quad \delta = \frac{b'\omega}{2\rho_0 c_0^2}, \quad b' = \frac{4}{3}\eta + \eta' + \varkappa\left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_v}\right),$$

$\eta$ — коэффициент сдвиговой вязкости, $\eta'$ — коэффициент объемной вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. В случае непериодического сигнала, когда спектр является непрерывным, представим скорость $v(z, \tau)$ в виде интеграла Фурье:

$$v(z,\tau) = \int\limits_0^\infty A(z,y)\cdot\cos y\tau\cdot d\tau + \int\limits_0^\infty B(z,y)\sin y\tau\cdot d\tau, \tag{1}$$

где

$$A(z,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty v(z,\tau)\cos y\tau\cdot d\tau, \quad B(z,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty v(z,\tau)\sin y\tau\cdot d\tau \tag{2}$$

есть трансформанты Фурье для функции $v(z, \tau)$, а переменная $y$ играет роль безразмерной частоты.

Перейдем в уравнении (1) к трансформантам Фурье $A(z, y)$, $B(z, y)$. Тогда получим следующие уравнения для $A$ и $B$:

$$\frac{\partial A(z,y)}{\partial z} = \frac{by}{4}\int\limits_0^\infty dy'\,[-B(z,y')\cdot A(z,y+y') + A(z,y')B(z,y+y') + $$
$$+ B(z,y')A(z,y-y') + A(z,y')B(z,y-y')] - \delta y^2 A(z,y). \tag{3}$$

$$\frac{\partial B(z,y)}{\partial z} = \frac{by}{4}\int\limits_0^\infty dy'\,[-A(z,y')\cdot A(z,y+y') - B(z,y')B(z,y+y') -$$
$$- A(z,y')\cdot A(z,y-y') + B(z,y')B(z,y-y')] - \delta\cdot y^2 B(z,y). \tag{4}$$