АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XV 1969 Вып. 4

УДК 534.284

ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. И. Матвеев, С. А. Рыбак

Рассмотрено распространение волн в многокомпонентной изотропной системе, состоящей из релаксирующих сред. В предположении, что параметры компонент мало отличаются от средних по системе, определяется во втором порядке теории возмущений затухание среднего поля вследствие релаксации и рассеяния на неоднородностях, а также изменение действительной части волнового числа.

При решении задачи о распространении волн в неоднородной среде с двумя флюктуирующими параметрами (плотностью и сжимаемостью), путем соответствующего преобразования [1], ее можно свести к задаче о флюктуации одного параметра. Однако ввиду того, что подобного рода задачи решаются приближенными методами, мы получаем решения относительно физически ненаблюдаемых величин $\overline{(p/\sqrt{\rho})}$. В данной работе устанавливается связь между физически наблюдаемыми величинами (средним неравновесным давлением) и флюктуирующими параметрами (плотностью, сжимаемостью и параметрами, характеризующими релаксацию).

Рассмотрим неоднородную, статистически изотропную среду, потери в которой определяются релаксационным механизмом Мандельштама — Леонтовича [2]. Процессами переноса, возникающими при распространении волн в неоднородной среде, мы будем пренебрегать, т. е. считать, что эффекты, вызванные потоками тепла и концентрации, являются величинами более высокого порядка малости, чем затухание среднего поля, вызванное флюктуациями плотности, сжимаемости и второй вязкости. Тензор плотности потока импульса такой среды выражается следующим образом [2]: $\sigma_{ik} = \delta_{ik}(p_0 - \zeta\nabla\mathbf{v})$. Давление в звуковой волне P в случае, когда процессы релаксации вызываются изменениями плотности (объема), выражается так: $P = p_0 - \zeta\nabla\mathbf{v}$, где p_0 — звуковое давление в состоянии термодинамического равновесия и $-\zeta\nabla\mathbf{v}$, ζ — коэффициент второй вязкости среды. Уравнения движения и непрерывности напишем в форме

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P, \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} + \rho c_0^2\nabla\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

(Здесь учтено термодинамическое соотношение $d\rho = \frac{1}{c_0^2}dp_0$). Исключив из системы (1) $\mathbf{v}$ и p_0, получим

$$\frac{1}{\rho c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{\zeta}{\rho c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right) = 0, \tag{2}$$

и для гармонического процесса $P \sim e^{-i\omega t}$,

$$\frac{\omega^2}{\rho c^2}P + \nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right) = 0, \tag{3}$$

где $c^2 = c_0^2\left(1 - \frac{\zeta}{\rho c_0^2} i\omega\right)$. Если ввести обозначение $\beta = 1/\rho c^2$, то уравнение (3) можно представить в форме

$$-\omega^2\rho^2\beta P = \rho\Delta P - \nabla\rho\nabla P. \qquad (4)$$

Предположим, что неоднородная среда описывается постоянными средними значениями величин $\bar{\rho}$, $\bar{\beta}$ и отклонениями от средних $\delta\rho$, $\delta\beta$, которые, будучи величинами первого порядка малости, являются случайными функциями координат. Тогда $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$, $\beta = \bar{\beta} + \delta\beta$, где $\frac{\delta_\rho}{\bar{\rho}} \ll 1$, $\left|\frac{\delta_\beta}{\bar{\beta}}\right| \ll 1$. Будем также считать, что поле давлений выражается через среднее поле

$$\bar{P} \sim e^{i\mathbf{s}_0\mathbf{r}} \qquad (5)$$

и его флюктуации δP: $P = \bar{P} + \delta P$. Строго говоря, выражение (5) соответствует следующей постановке задачи: на границу неоднородного полупространства падает плоская волна $e^{i\mathbf{s}_0\mathbf{r}}$, определяется поле, прошедшее через границу в неоднородную среду. При этом предполагается, что среднее поле также имеет вид плоской волны. Задание среднего поля в неоднородной среде в форме, подобной полю в однородной среде, является гипотезой, принятой ранее в работе [3], если ограничиться вторым порядком теории возмущений, аналогично приближению Бурре [4, 5]. Подставляя ρ, β, P, выраженные через их средние значения и флюктуации в уравнение (4) и ограничиваясь членами второго порядка малости, мы получим систему двух уравнений, первое — относительно членов первого порядка малости и второе — относительно средних.

Уравнение относительно членов первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\delta P + k^2\delta P = \left[\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} s_0^2 + i\frac{\nabla\delta\rho}{\bar{\rho}}\mathbf{s}_0 - k^2\left(2\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\beta}{\bar{\beta}}\right)\right]\bar{P},$$

где $k^2 = \omega^2\bar{\rho}\bar{\beta}$. Решением этого уравнения будет

$$\delta P(\mathbf{r}) = \int G_{(+)}(r|r')\left[\frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}} s_0^2 + i\frac{\nabla\delta\rho'}{\bar{\rho}}\mathbf{s}_0 - k^2\left(2\frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\beta'}{\bar{\beta}}\right)\right]\bar{P}(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}',$$

где $G_{(+)}(r|r') = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$

Уравнение относительно средних:

$$\left(1 - \frac{\overline{\delta\rho^2}}{\bar{\rho}^2}\right)s_0^2\bar{P} - k^2\left(1 - \frac{\overline{\delta\rho^2}}{\bar{\rho}^2} + \frac{\overline{\delta\rho\delta\beta}}{\bar{\rho}\bar{\beta}}\right)\bar{P} = k^2\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\beta}{\bar{\beta}}\right)\delta P} - \overline{\frac{\nabla\delta\rho}{\bar{\rho}}\nabla\delta P}. \qquad (6)$$

Подставив в уравнение (6) выражение для δP, мы получим следующее дисперсионное уравнение:

$$A_1 s_0^2 - A_2(\omega)k^2 + k^2\int_0^\infty e^{ikx}[A_3(\omega, x)s_0^2 - A_4(\omega, x)k^2]\frac{\sin s_0 x}{s_0}dx -$$

$$-\int_0^\infty e^{ikx}A_5(x)\left(\cos s_0 x - \frac{\sin s_0 x}{s_0 x}\right)\frac{1 - ikx}{x}dx = 0. \qquad (7)$$

Здесь $x = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$, $A_1 = 1 - \overline{\delta\rho^2}/\bar{\rho}^2$,

$$A_2(\omega) = 1 - \frac{\overline{\delta\rho^2}}{\bar{\rho}^2} + \frac{\overline{\delta\rho\,\delta\beta}}{\bar{\rho}\,\bar{\beta}}, \quad A_3(\omega, x) = \frac{\overline{\delta\rho\delta\rho'}}{\bar{\rho}^2} + \frac{\overline{\delta\beta\delta\rho'}}{\bar{\beta}\bar{\rho}},$$

$$A_4(\omega, x) = \overline{\left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\beta}{\bar{\beta}}\right)\left(2\frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\delta\beta'}{\bar{\beta}}\right)},$$

$$A_5(x) = \frac{\overline{\nabla\delta\rho\nabla\delta\rho'}}{\bar{\rho}^2}, \quad \bar{\rho} = \rho_1\left(1 - \sum_{i=2}^{n} c_i\right) + \sum_{i=2}^{n} \rho_i c_i,$$

где ρ_i — плотность i-й компоненты, c_i — концентрация i-й компоненты, n — число компонент. Выражение для $\bar{\beta}$ имеет такую же структуру, что и для $\bar{\rho}$.

Чтобы решить уравнение (7), необходимо знать вид корреляционных функций, входящих в выражения $A_3(\omega, x)$, $A_4(\omega, x)$, $A_5(x)$. Получить их можно либо исходя из модельных представлений о среде, либо из эксперимента. Для примера рассмотрим двухкомпонентную систему, обладающую следующими свойствами:

1) релаксирует лишь одна компонента,

2) релаксирующая компонента характеризуется одним временем релаксации τ и, следовательно, β для этой компоненты можно представить как $\beta = \beta_0\beta_\infty \dfrac{1 - i\omega\tau}{\beta_\infty - i\omega\tau\beta_0}$ где $\beta_0 = 1/\rho c_0^2$, $\beta_\infty = 1/\rho c_\infty^2$ (значения c_0 и c_∞, согласно работе [2]). Для нерелаксирующей компоненты $\beta = \beta_0$. Таким образом, среднее значение сжимаемости для двухкомпонентной среды будет $\bar{\beta} = (1 - c)\beta_1 + c\beta_{02}$;

3) все коэффициенты корреляции имеют одинаковую зависимость вида $e^{-x/a}$, где a — радиус корреляции.

В связи с этим коэффициенты $A_3(\omega, x)$, $A_4(\omega, x)$, $A_5(x)$ можно представить так:

$$A_3(\omega, x) = A_3(\omega)e^{-x/a}, \; A_4(\omega, x) = A_4(\omega)e^{-x/a}, \; A_5(x) = A_5 e^{-x/a},$$

где $A_3(\omega)$, $A_4(\omega)$, A_5 имеют такую же структуру, как $A_3(\omega, x)$, $A_4(\omega, x)$, $A_5(x)$, но рассматриваются в точке $x = 0$. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет следующий вид:

$$A_1 s_0^2 - A_2(\omega)k^2 + k^2\frac{A_3(\omega)s_0^2 - A_4(\omega)k^2}{s_0^2 + \left(ik - \dfrac{1}{a}\right)^2} -$$

$$- A_5\int_0^\infty e^{ikx}\left(\cos s_0 x - \frac{\sin s_0 x}{s_0 x}\right)\frac{1 - ikx}{x}e^{-x/a}\,dx = 0. \qquad (8)$$

При решении уравнения (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Для этого представим s_0 как $s_0 = k + s_0^{(2)}$, где $s_0^{(2)}$ — член второго порядка малости по амплитудам флюктуаций.

Решая уравнение (8) относительно $s_0^{(2)}$, получим

$$s_0^{(2)} = \frac{1}{2kA_1^{(0)}}\left\{k^2\left[A_2^{(2)}(\omega) - A_1^{(2)} - k^2a^2\frac{A_4(\omega) - A_3(\omega)}{2ika - 1}\right] + \right.$$

$$\left. + A_5\int_0^\infty e^{ikx}\left(\cos kx - \frac{\sin kx}{kx}\right)\frac{1 - ikx}{x}e^{-x/a}\,dx\right\} \qquad (9)$$

где $A_1^{(0)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}(\omega)$— члены нулевого и второго порядков малости коэффициентов A_1 и $A_2(\omega)$. $A_3(\omega)$, $A_4(\omega)$, A_5 состоят только из членов второго порядков малости.

Исследуем, как флюктуации отдельных параметров влияют на рассеяние. 1. Предположим сперва, что флюктуации плотности рассеивают значительно сильнее, чем флюктуации сжимаемости.

Тогда флюктуациями сжимаемости можно пренебречь. Если $|ka| \ll 1$, то при $\omega\tau \ll 1$

$$k = k_0\left[1 + i\frac{(1-c)\beta_{01}}{2\beta_{\infty 1}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_0}\cdot\omega\tau\right).$$

Здесь $k_0 = \omega\sqrt{\overline{\rho\bar{\beta}_0}}$, $\bar{\beta}_0 = (1-c)\beta_{01} + c\beta_{02}$,

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\rho^2}/\bar{\rho}^2} = \frac{k_0 a}{6} + i\left[3(k_0a)^4 + \frac{(1-c)\beta_{01}}{12\beta_{\infty 1}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_0}\cdot(k_0a)\cdot\omega\tau\right].$$

При $\omega\tau \gg 1$, $k = k_\infty\left[1 + i\frac{(1-c)\beta_{\infty 1}}{2\beta_{01}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_\infty}\cdot\frac{1}{\omega\tau}\right]$,

где $k_\infty = \omega\sqrt{\overline{\rho\bar{\beta}_\infty}}$, $\bar{\beta}_\infty = (1-c)\beta_{\infty 1} + c\beta_{02}$,

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\rho^2}/\bar{\rho}^2} = \frac{k_\infty a}{6} + i\left[3(k_\infty a)^4 + \frac{(1-c)\beta_{\infty 1}}{12\beta_{01}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_\infty}\cdot\frac{k_\infty a}{\omega\tau}\right].$$

Если $|ka| \gg 1$, то при $\omega\tau \ll 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\rho^2}/\bar{\rho}^2} = \frac{k_0 a}{8}\left[1 - 2\frac{(1-c)\beta_{01}}{\beta_{\infty 1}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_0}\cdot(k_0a)\cdot\omega\tau\right] + i\frac{(k_0a)^2}{4}$$

и при $\omega\tau \gg 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\rho^2}/\bar{\rho}^2} = \frac{k_\infty a}{8}\left[1 - 2\frac{(1-c)\beta_{\infty 1}}{\beta_{01}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_\infty}\cdot\frac{k_\infty a}{\omega\tau}\right] + i\frac{(k_\infty a)^2}{4}.$$

2. Предположим теперь, что флюктуации сжимаемости значительно больше флюктуаций плотности. Тогда при $|ka| \ll 1$ и $\omega\tau \ll 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\beta^2}/\bar{\beta}^2} = \frac{(k_0a)^3}{2} + i\left[(k_0a)^4 + \frac{3}{4}\frac{(1-c)\beta_{01}}{\beta_{\infty 1}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_0}\cdot(k_0a)^3\omega\tau\right],$$

а при $\omega\tau \gg 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\beta^2}/\bar{\beta}^2} = \frac{(k_\infty a)^3}{2} + i\left[(k_\infty a)^4 + \frac{3}{4}\frac{(1-c)\beta_{\infty 1}}{\beta_{01}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_\infty}\cdot\frac{(k_\infty a)^3}{\omega\tau}\right]$$

Если $|ka| \gg 1$, то при $\omega\tau \ll 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\rho^2}/\bar{\beta}^2} = \frac{k_0 a}{8}\left[1 - 2\frac{(1-c)\beta_{01}}{\beta_{\infty 1}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_0}\cdot(k_0a)\cdot\omega\tau\right] + i\frac{(k_0a)^2}{4}$$

и при $\omega\tau \gg 1$

$$\frac{s_0^{(2)}a}{\overline{\delta\beta^2}/\bar{\beta}^2} = \frac{k_\infty a}{8}\left[1 - 2\frac{(1-c)\beta_{\infty 1}}{\beta_{01}}\cdot\frac{\beta_{01}-\beta_{\infty 1}}{\bar{\beta}_\infty}\cdot\frac{k_\infty a}{\omega\tau}\right] + i\frac{(k_\infty a)^2}{4}.$$

Если сравнить результаты при указанных двух предположениях, то можно видеть, что при рассеянии на крупномасштабных неоднородностях ($|ka| \geqslant 1$) формулы имеют одинаковую структуру, а при рассеянии на мелкомасштабных неоднородностях ($|ka| \ll 1$) сильно отличаются друг от друга. Это объясняется тем, что рассеяние на флюктуациях плотности зависит не только от самих флюктуаций плотности, но и от их градиентов. Когда размеры неоднородностей велики, вклад градиентов флюктуаций плотности в рассеяние является величиной более высокого порядка малости, чем вклад самих флюктуаций плотности, поэтому выражения для рассеяния на флюктуациях плотности и сжимаемости имеют одинаковый вид. В случае мелкомасштабных неоднородностей влияние градиентов флюктуаций плотности на рассеяние значительно больше, чем влияние самих флюктуаций плотности, поэтому формулы для рассеяния на флюктуациях плотности и сжимаемости отличны друг от друга. Отметим, что именно рассеяние на флюктуациях плотности описывается аналогично рассеянию электромагнитных волн на флюктуациях диэлектрической проницаемости ε. Поэтому при $\omega \to 0$ из наших формул получается результат Ландау для диэлектрической проницаемости смеси [6].

Интересно рассмотреть влияние релаксации на рассеяние. При $|ka| \ll 1$, как в случае $\omega\tau \ll 1$, так и при $\omega\tau \geqslant 1$, учет релаксации приводит к увеличению коэффициента затухания, причем в случае рассеяния на флюктуациях плотности влияние ее такое же, как в работе [2] (при $\omega\tau \ll 1$ дает вклад в коэффициент затухания пропорционально ω^2, а при $\omega\tau \geqslant 1$ от частоты не зависит). При рассеянии на флюктуациях сжимаемости релаксация дает вклад в коэффициент затухания, пропорциональный ω^4 при $\omega\tau \ll 1$ и ω^2 при $\omega\tau \geqslant 1$. Когда же $|ka| \geqslant 1$, учет релаксации приводит к уменьшению сдвига фазы из-за рассеяния, причем при $\omega\tau \ll 1$ пропорционально ω^2, а при $\omega\tau \geqslant 1$ — на постоянную величину.

При вычислении интегралов уравнения (7) показатели степеней подынтегральных функций должны удовлетворять условию $\operatorname{Im}(s_0 - k) - \dfrac{1}{a} < 0$.

Но $\operatorname{Im}(s_0 - k)$ является коэффициентом затухания при рассеянии ($\eta_{\text{рас}}$), поэтому на радиус корреляции, входящий в полученные выражения, накладывается следующее ограничение сверху: $a < 1/\eta_{\text{рас}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, стр. 152.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, М., ГТТИ, 1954.
3. И. М. Лифшиц, Л. Н. Розенцвейг. Ж. эксп. и теор. физ., 1946, 11, 967.
4. R. C. Bourret. Stochastically perturbed fields, with applications to wave propagation in randon media. Nuovo Cimento, 1962.
5. R. C. Bourret. Propagation of randomly perturbed fields. J. Phys., 1962, 40, 6, 782.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., ГТТИ, 1957, стр. 68.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
2 сентября 1968 г.