АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 1

УДК 534.221

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Н. Е. Мальцев

Рассмотрены некоторые пути модификации широко известного метода поперечных сечений, сводящиеся к изменению формы сечения. Приведены конкретные примеры сечений, определяемых координатными линиями различных плоских систем координат, в которых переменные в уравнении Гельмгольца разделяются. Метод поперечных сечений применяется к решению скалярного уравнения Гельмгольца в бесконечных и полубесконечных волноводах симметричных относительно оси. Получены соответствующие бесконечные системы дифференциальных уравнений.

Пусть имеется плоский волновод переменного сечения (фиг. 1) с некоторыми граничными условиями на стенках. Задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\mu(s)u + \nu(s)\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{2}$$

где n — внутренняя нормаль к стенке, μ и ν — некоторые функции длины дуги s вдоль стенки. Согласно работам [1—3], при каждом фиксированном x параллельно оси y проводится плоское сечение и предполагается, что распространение волн в окрестности этого сечения происходит, как в некотором волноводе сравнения постоянной ширины $2H(x)$, т. е. существует набор нормальных волн, из которых конечное число распространяется, остальные затухают. Параметры нормальных волн отыскиваются из решения уравнения (1) в волноводе сравнения при фиксированном значении x. Такая формулировка метода поперечных сечений наряду с несомненными достоинствами, среди которых нужно отметить простоту получающихся функций, имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, точно удовлетворить граничным условиям мы можем лишь в случае $\nu \equiv 0$, так как нормаль к стенке волновода сравнения не совпадает с нормалью к стенке в заданном волноводе (см. впрочем, работу [4]). Кроме того, ширина волновода в данном сечении ничего не говорит ни о наклоне стенок, ни о их кривизне, что сказывается на сходимости приближенных решений.

В работе [5] сделан шаг по пути преодоления указанных недостатков (заметим, что в работе [6] повторены результаты работы [5]). В качестве сечений в этой работе выбраны ортогональные стенкам волновода сферы, поскольку рассматриваются осесимметричные трехмерные волноводы. Ниже мы разовьем подробно аналогичную идею для плоских волноводов. Волноводами сравнения в этом случае будут клинья с углом раствора $2\varphi_0(s)$ (фиг. 2). Решение уравнения (1) будем искать в виде

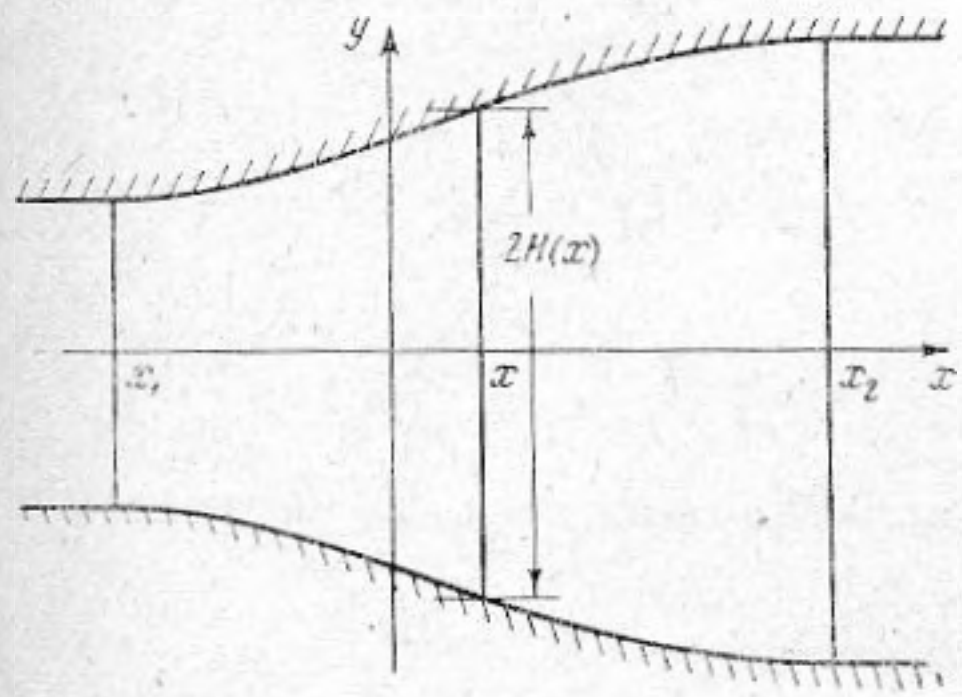
$$u(s,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\, y_n(s,\varphi), \quad \frac{\partial u(s,\varphi)}{\partial n} = ik \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s)\, y_n(s,\varphi), \tag{3}$$

где n — нормаль к сечению, a_n и b_n — неизвестные функции s. Функции $y_n(s, \varphi)$ есть ортонормированные собственные функции эрмитова оператора

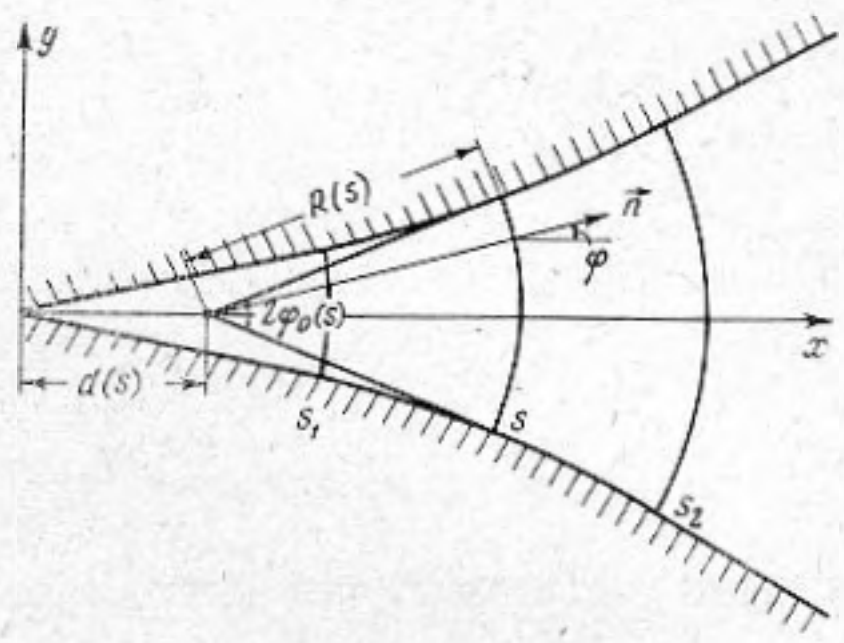
$$Ly \equiv \frac{d^2y}{d\varphi_2}, \quad \mu(s)y \pm \frac{\nu(s)}{R(s)}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pm\varphi_0(s)} = 0, \quad |\mu|^2 + \|\nu\|^2 \neq 0,$$

$$\operatorname{Im}\mu = \operatorname{Im}\nu \equiv 0. \tag{4}$$

В качестве дальнейшего развития метода поперечных сечений в сообщении автора [7] предложено строить при каждом s эллиптические сече-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния, причем так, что сопряженные к эллипсам гиперболы, которые являются стенками волновода сравнения, касаются стенок во втором порядке, т. е. кривизна стенок волновода совпадает с кривизной стенок волновода сравнения (фиг. 3). В этом случае решение уравнения (1) следует искать в виде

$$u(s, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\, y_n(s, \varphi), \quad \frac{\partial u(s, \varphi)}{\partial n} = \frac{i}{h}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(s)\, y_n(s, \varphi), \tag{5}$$

где n — внешняя нормаль к стенке, $y_n(s, \varphi)$ — ортонормированные собственные функции оператора

$$Ly \equiv \left\{\frac{d^2}{d\varphi^2} - k^2a^2\sin^2\varphi\right\}y, \quad \mu(s)y \pm \frac{\nu(s)}{h(s, \varphi_0)}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pm\varphi_0(s)} = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{Im}\mu = \operatorname{Im}\nu \equiv 0, \quad |\mu|^2 + |\nu|^2 \neq 0.$$

Здесь $h(s, \varphi)$ — коэффициент Ламе координаты φ.

Рассмотрим случай цилиндрических сечений. Решение уравнения (1) в области, показанной на фиг. 2, с граничными условиями (2) будем искать в форме (3). Функции y_n, согласно формуле (4), будут

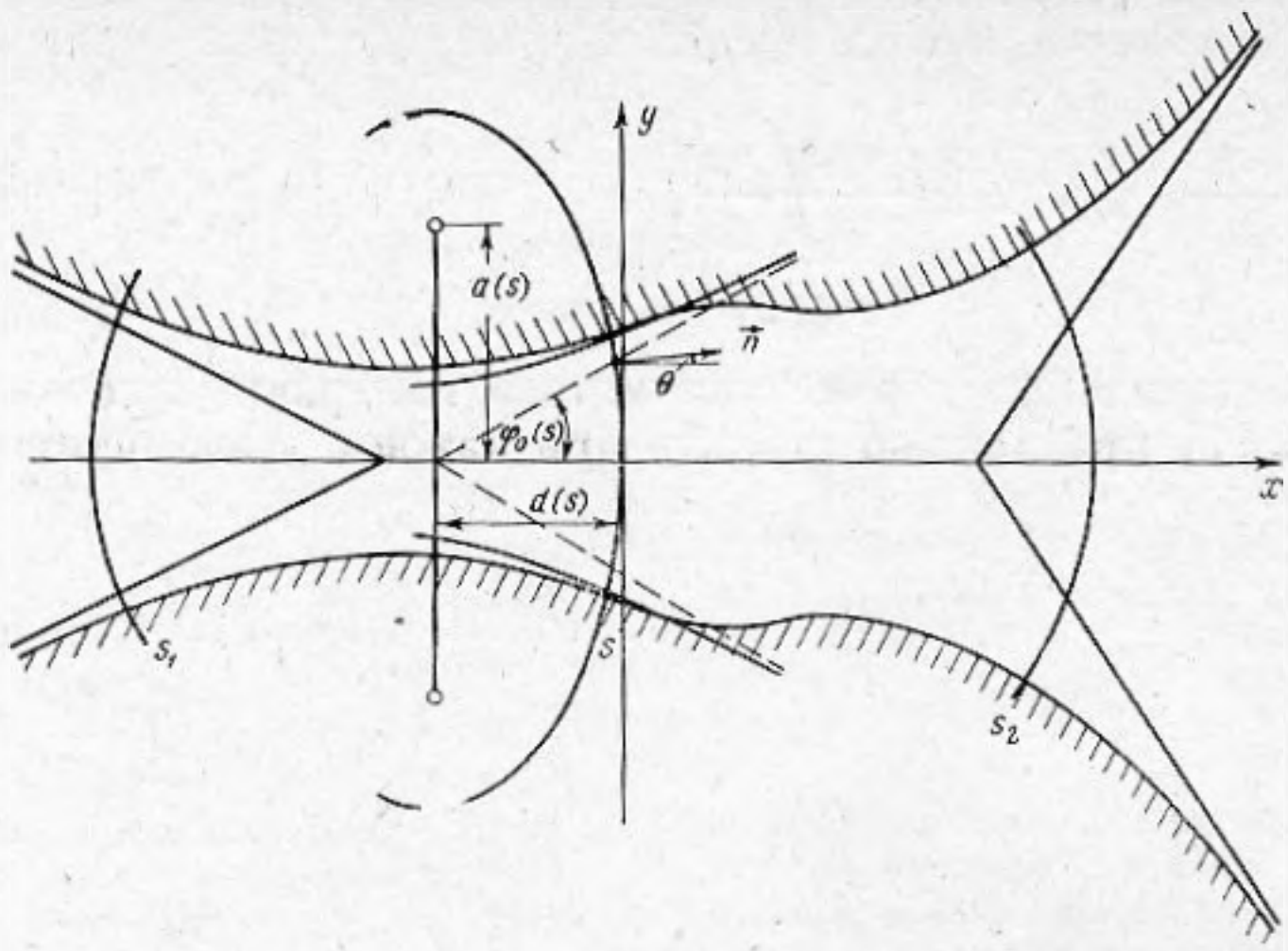
$$y_n(s, \varphi) = [\varphi_0(s)]^{-1/2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} [\lambda_n(s)\varphi + \varepsilon_n(s)], \tag{7}$$

где $\lambda_n(s)$ и $\varepsilon_n(s)$ определяются из граничных условий

$$\mu(s)\, y_n(s, \varphi) \pm \frac{\nu(s)}{R(s)}\frac{\partial y_n(s, \varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pm\varphi_0(s)} = 0. \tag{8}$$

Введем скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_s = \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} u(s, \varphi)\, v(s, \varphi)\, d\varphi. \tag{9}$$



Фиг. 3

Функции y_n таковы, что выполняется условие

$$\langle y_m, y_n \rangle_s = \delta_{mn}. \tag{10}$$

Каждое сечение характеризуется параметрами $R(s)$, $d(s)$ и $\varphi_0(s)$, определяемыми из уравнений формы стенки волновода

$$x = X(s), \quad y = \pm Y(s) \tag{11}$$

согласно выражениям

$$X(s) = d(s) + R(s)\cos\varphi_0(s), \quad Y(s) = R(s)\sin\varphi_0(s),$$
$$\alpha(s) = \frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\varphi_0(s). \tag{12}$$

Таким образом, при условии

$$\Delta(s,\varphi) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\varphi)} = R(\dot{R} + \dot{d}\cos\varphi) \neq 0 \quad \left(\dot{f} = \frac{df}{ds}\right), \tag{13}$$

каждой точке x, y поставлена в соответствие точка s, φ при помощи соотношений

$$x = d(s) + R(s)\cos\varphi, \quad y = R(s)\sin\varphi, \tag{14}$$

где $d(s)$, $R(s)$ и $\varphi_0(s)$ определены из формулы (12):

$$d(s) = X(s) - \frac{Y(s)}{\alpha(s)}, \quad R(s) = Y(s)\frac{[1+\alpha^2(s)]^{1/2}}{\alpha(s)}, \quad \varphi_0(s) = \operatorname{arctg}(\alpha(s)). \tag{15}$$

Из соотношений (15) получим

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{R}{\Delta}\cos\varphi, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{R}{\Delta}\sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\dot{R}}{\Delta}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\dot{d} + \dot{R}\cos\varphi}{\Delta}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{R}{\Delta}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\dot{d}\sin\varphi}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{16}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\sin\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Применим к первому из выражений в формуле (3) оператор $\partial/\partial n$ и результат приравняем второму выражению в формуле (3); после скаляр-

ного умножения получившегося тождества на y_m оно примет вид

$$\frac{da_m}{ds} - ik\dot{R}b_m = -\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\alpha_{mn} + \frac{\dot{d}}{R}\beta_{mn}\right)a_n - ik\dot{d}\gamma_{mn}b_n\right\}. \qquad (17)$$

Построим при помощи формул (16) и (3) функцию $\Delta u + k^2 u$ и, приравняв ее нулю, после скалярного умножения на y_m получим

$$\frac{db_m}{ds} + \frac{\dot{R}}{R}b_m - ik\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{k^2R^2}\right)a_m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{i\left[\frac{\dot{d}}{kR^2}\beta_{mn} - k\dot{d}\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{(kR)^2}\right)\gamma_{mn}\right]a_n +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\dot{d}}{R}(\gamma_{mn} + \beta_{mn}) + \alpha_{mn}\right]b_n. \qquad (18)$$

Уравнения для нулевого приближения имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{da_{m0}}{ds} + \left(\alpha_{mm} + \frac{\dot{d}}{R}\beta_{mm}\right)a_{mm} - ik(\dot{R} + \dot{d}\gamma_{mm})b_{m0} = 0,\\ \frac{db_{m0}}{ds} - ik\left[\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{k^2R^2}\right)(1 - \dot{d}\gamma_{mm}) + \frac{\dot{d}}{k^2R^2}\beta_{mm}\right]a_{m0} +\\ + \left[\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{d}}{R}(\gamma_{mm} + \beta_{mm}) + \alpha_{mm}\right]b_{m0} = 0.\end{gathered} \qquad (19)$$

Подставив в формулу (19) параметры сечения из выражения (15), получим

$$\begin{gathered}\frac{da_{m0}}{ds} + \left(\alpha_{mm} + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2(1+\alpha^2)}\beta_{mm}\right)a_{m0} -\\ - ik\left(1 - \frac{\beta Y}{\alpha^2(1+\alpha^2)}(1 + (1+\alpha^2)^{1/2}\gamma_{mm})\right)b_{m0} = 0,\\ \frac{db_{m0}}{ds} - ik\left(\left(1 - \frac{\lambda_m^2\alpha^2}{k^2Y^2(1+\alpha^2)}\right)\left(1 - \frac{\beta Y}{\alpha^2(1+\alpha^2)^{1/2}}\gamma_{mm}\right) +\right.\\ \left. + \frac{\beta}{k^2Y(1+\alpha^2)^{3/2}}\beta_{mm}\right)a_{m0} + \left(\frac{\alpha^2(1+\alpha^2) - \beta Y}{\alpha Y(1+\alpha^2)^{3/2}} -\right.\\ \left. - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2(1+\alpha^2)}(\gamma_{mm} + \beta_{mm}) + \alpha_{mm}\right)b_{m0} = 0.\end{gathered} \qquad (19a)$$

Фигурирующие в формулах (17) и (18) матричные элементы таковы:

$$\begin{gathered}\alpha_{mn}(s) = \langle y_m, y_{ns}\rangle_s, \quad \beta_{mn}(s) = \langle \sin\varphi y_{n\varphi}' y_m\rangle_s,\\ \gamma_{mn}(s) = \langle y_m, y_n\cos\varphi_0\rangle.\end{gathered} \qquad (20)$$

При $\dot{R} = 0$ выражение (19а) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{da_{m0}}{ds} + \left(\alpha_{mm} + \beta_{mm}\frac{\alpha}{Y}\right)a_{m0} + ik\frac{\beta Y}{\alpha^2(1+\alpha^2)^{1/2}}\gamma_{mm}b_{m0} = 0,\\ \frac{db_{m0}}{ds} - ik\left(\left(\frac{\lambda_m^2\alpha^2}{k^2Y^2(1+\alpha^2)}\right)(1 - (1+\alpha^2)^{1/2}\gamma_{mm}) +\right.\\ \left. + \frac{\beta}{k^2Y(1+\alpha^2)^{3/2}}\beta_{mm}\right)a_{m0} + \left(\alpha_{mm} - \frac{\alpha}{Y}(\gamma_{mm} + \beta_{mm})\right)b_{m0} = 0.\end{gathered} \qquad (21)$$

Условие $\dot{R} = 0$ эквивалентно (см. формулу (15)) выполнению следующего дифференциального уравнения для формы стенок:

$$(Y')^2(1 + (Y')^2) - Y''Y = 0. \tag{22}$$

Полный интеграл уравнения (22) есть

$$C_1X + C_2 = \pm\ln\left(\frac{1 + (1 - C_1^2Y^2)^{1/2}}{Y}\right) \mp (1 - C_1^2Y^2)^{1/2}, \tag{23}$$

т. е. представляет собой семейство трактрис.

Условие (13) и требование $\dot{R} \neq 0$ означает, что функции (11) должны быть такими, чтобы всюду имело место неравенство

$$-\frac{1 + (1 + (Y')^2)^{1/2}}{Y} < \frac{Y''}{(1 + (Y')^2)^{3/2}} < \frac{(Y')^2}{Y}. \tag{24}$$

Перейдем к случаю эллиптических сечений. Пусть область, в которой нам нужно найти решение уравнения (1), изображена на фиг. 3. Решение будем искать в виде (5), где $y_n(s, \varphi)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y_n}{d\varphi^2} + k^2a^2(s)\left[\xi_n^2(s) - \sin^2\varphi\right]y_n = 0, \tag{25}$$

а $\xi_n(s)$ находятся из граничных условий

$$\mu(s)\,y_n \pm \frac{\nu(s)}{h(s, \varphi_0)} \cdot \frac{dy_n}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\pm\varphi_0(s)} = 0. \tag{26}$$

Введем скалярное произведение

$$\langle u, v\rangle_s = \int\limits_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} u(s, \varphi)\,v(s, \varphi)\,d\varphi, \tag{27}$$

причем в случае вещественных μ и ν $\langle y_m, y_n\rangle_s = \delta_{mn}$. При каждом s введем эллиптическое сечение

$$x = d(s) + a(s)\operatorname{sh}\sigma(s)\cos\varphi,\ \ y = a(s)\operatorname{ch}\sigma(s)\sin\varphi,\ \ \varphi \in [-\varphi_0(s),\ \varphi_0(s)], \tag{28}$$

где параметры $d(s)$, $a(s)$, $\sigma(s)$ и $\varphi_0(s)$ определяются из уравнений для формы стенки (11), согласно соотношениям

$$\begin{gathered} X(s) = d(s) + a(s)\operatorname{sh}\sigma(s)\cos\varphi_0(s), \\ Y(s) = a(s)\operatorname{ch}\sigma(s)\sin\varphi_0(s), \quad \alpha(s) = \frac{dY}{dX} = \operatorname{th}\sigma(s)\operatorname{tg}\varphi_0(s), \\ \beta(s) = \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{a(s)}\,\frac{\sin\varphi_0(s)}{\operatorname{ch}^3\sigma(s)\cos^2\varphi_0(s)}. \end{gathered} \tag{29}$$

Параметры (29) дают нам эллиптическое сечение волновода, ортогональное стенке, такое, что кривизна сопряженной эллипсу гиперболы, проходящей через точку пересечения эллипса со стенкой, равна кривизне стенки.

В этом случае, когда $s \overline{\in} [s_1, s_2]$, т. е. мы находимся вне возмущенного участка волновода и его стенки гиперболические, уравнение Гельмгольца в координатах σ и φ имеет вид

$$\frac{\partial^2u}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2} + k^2a^2(\operatorname{ch}^2\sigma - \sin^2\varphi)\,u = 0 \tag{30}$$

и разделяется на два обыкновенных уравнения:

$$\frac{d^2M}{d\sigma^2}+k_1^2a^2(\operatorname{ch}^2\sigma-\xi^2)M=0,\qquad u=M(\sigma)\Phi(\varphi),$$
$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k_1^2a^2(\xi^2-\sin^2\varphi)\Phi=0,\qquad \varphi\in[-\varphi_0,\varphi_0]. \tag{31}$$

В формулах (30), (31) $a=\text{const}$, $\varphi_0=\text{const}$. Мы вводим при $s\in[s_1, s_2]$ зависящие от s величины $a(s)$, $\varphi_0(s)$, $d(s)$ и заменяем координату σ координатой s. В уравнение для зависящих от φ функций Φ_n формально подставляем a, зависящее от s, и в граничные условия подставляем φ_0, зависящее от s.

Потребуем теперь, чтобы решение (5) удовлетворяло уравнению Гельмгольца. Из формулы (28) находим

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{h\cos\vartheta}{ap+\Delta_0},\quad \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{h\sin\vartheta}{ap+\Delta_0},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-q+h\sin\vartheta/h_0}{ap+\Delta_0},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{r+h\cos\vartheta/h_0}{ap+\Delta_0},\quad h^2=a^2(\operatorname{ch}^2\sigma-\sin^2\varphi),\quad h_0^2=a^2(\operatorname{ch}^2\sigma-\sin^2\varphi_0),$$
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\varphi)}=ap+\Delta_0\neq 0,\qquad \Delta_0=\frac{h^2}{h_0}, \tag{32}$$

где ϑ — угол между нормалью к сечению и осью x и

$$p(s,\varphi)=(\dot d\cos\varphi+\dot d\operatorname{sh}\sigma)\operatorname{ch}\sigma,\qquad q(s,\varphi)=\dot a\operatorname{ch}\sigma\sin\varphi,$$
$$r(s,\varphi)=\dot d+\dot a\operatorname{sh}\sigma\cos\varphi \tag{33}$$

параметры, равные нулю в эллиптической системе координат, т. е. когда $s\in[s_1, s_2]$. Из формулы (26) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{h\cos\vartheta}{ap+\Delta_0}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{q+h\sin\vartheta/h_0}{ap+\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad Q=\frac{h}{ap+\Delta_0},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{h\sin\vartheta}{ap+\Delta_0}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{r+h\cos\vartheta/h_0}{ap+\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{34}$$
$$\frac{\partial}{\partial n}=Q\frac{\partial}{\partial s}+\frac{Q}{h}(r\sin\vartheta-q\cos\vartheta)\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\sin\vartheta}{h}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\cos\vartheta}{h}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Подействуем оператором $\partial/\partial n$ из формулы (34) на первое из уравнений (5) и результат приравняем второму: после скалярного умножения на $y_m(s,\varphi)$ получим

$$\frac{da_m}{ds}-\frac{i}{h_0}b_m=-k\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_{mn}+\varepsilon_{mn})a_n+i\mu_{mn}b_n. \tag{35}$$

Построив при помощи формул (34) и (5) функцию Δu, прибавив к последней k^2u и приравняв сумму нулю, после скалярного умножения получившегося тождества на $y_m(s,\varphi)$ получим

$$\frac{db_m}{ds}-i\frac{k^2a^2}{h_0}(\operatorname{ch}^2\sigma-\xi_m^2)a_m=k\sum_{n=0}^{\infty}i(\beta_{mn}+\nu_{mn})a_n-(\alpha_{mn}-\gamma_{mn})b_n. \tag{36}$$

Матричные элементы здесь таковы:

$$\alpha_{mn}=\frac{1}{k}\langle y_m, y_{ns}'\rangle_s, \qquad \beta_{mn}=ka\,\langle py_n, y_m\rangle,$$

$$\gamma_{mn}=\frac{1}{k}\left\langle y_m q\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\vartheta}{h}y_n\right)-r\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\vartheta}{h}y_n\right)\right\rangle,$$

$$\nu_{mn}=\frac{1}{k}\left\langle y_m, q\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\vartheta}{h}y_{n\varphi}\right)-r\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\vartheta}{h}y_{n\varphi}\right)\right\rangle,$$

$$\varepsilon_{nm}=\frac{1}{k}\left\langle\frac{r\sin\vartheta-q\cos\vartheta}{h}y_{n\varphi}', y_m\right\rangle, \quad \mu_{mn}=\frac{a}{k}\left\langle y_m, \frac{p}{h^2}y_n\right\rangle. \tag{37}$$

Уравнения для нулевого приближения имеют вид

$$\frac{da_{m0}}{ds}+k(\alpha_{mm}+\varepsilon_{mm})a_{m0}-i\left(\frac{1}{h_0}-\mu_{mm}\right)b_{m0}=0,$$

$$\frac{db_{m0}}{ds}-ik\left(\frac{a^2}{h_0}(\mathrm{ch}^2\sigma-\xi_m^2)+\beta_{mm}+\nu_{mm}\right)a_{m0}+k(\alpha_{mm}-\gamma_{mm})b_{m0}=0. \tag{38}$$

Подставив в уравнения (38) параметры сечения из формулы (28), получим

$$\frac{da_{m0}}{ds}+k(\alpha_{mm}+\varepsilon_{mm})q_{m0}-i\left(\frac{1}{Y}\left(\frac{\alpha^2+pY}{1+\alpha^2}\right)^{1/2}-\mu_{mm}\right)b_{m0}=0,$$

$$\frac{db_{m0}}{ds}-ik\left(k\beta^2Y^4\frac{(1+\alpha^2+\beta Y)^2}{(1+\alpha^2)(\alpha^2+\beta Y)^3}\left(\frac{\alpha^2+\beta Y}{\beta Y}-\xi_m^2\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_{mm}+\nu_{mm}\right)a_{m0}+k(\alpha_{mm}-\gamma_{mm})b_{m0}=0. \tag{38a}$$

Уравнения (19), (19а) и (38), (38а) можно решать, например, находя их ВКБ-решения (см. [8]), а более высокие приближения можно отыскивать, как это делается в работе [1], подстановкой нулевых решений в правые части уравнений.

В заключение следует отметить некоторые особенности предложенных модификаций метода поперечных сечений. Так, в случае, когда стенки волновода определяются трактрисами ($\dot{R}=0$), согласно уравнениям для нулевых приближений, набег фазы при распространении нормальных волн в нулевом приближении меньше, чем в каком-либо другом случае. Условие применимости нулевых приближений в случае цилиндрических сечений состоит в малости кривизны стенки волновода.

В случае эллиптических сечений условие применимости нулевых приближений состоит в малости $d/ds(\alpha^2+\beta Y)$ — производной от параметра, постоянного в том случае, когда стенки волновода определяются гиперболами. Малость этих параметров подразумевается в том смысле, что по степеням их происходит разложение решения бесконечной системы дифференциальных уравнений.

В заключение автор выражает благодарность Б. З. Каценеленбауму за обсуждение результатов и Л. М. Бреховских за постоянный интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Л. М. Бреховских. О роли акустики в исследовании океана. Физ. атмосферы и океана, 1965, 1, 10, 1051—1064.
3. D. Pierce. Extention of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified media. J. Acoust. Soc. America, 1965, 37, 1, 19—27.

4. Б. А. Шкаленков. О распространении волн в волноводе с неплоской границей. Докл. на VI Всес. акуст. конференции, М., 1968.
5. Г. Я. Любарский, А. Я. Повзнер. К теории распространения волн в нерегулярных волноводах. Ж. техн. физ., 1959, **29**, 2, 170—179.
6. H. G. Unger. Wave propagation in horns and through horn junctions. International serie of monographs in electromagnetic waves, **2** (proceedings of a symposium held at Delft, the Netherlands, Sept. 1965), N. Y., 1967.
7. Н. Е. Мальцев. О волноводах переменного сечения. Докл. на VI Всес. акуст. конференции, М., 1968.
8. М. В. Федорюк. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1966, **169**, 2, 288—291.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
28 января 1969 г.