АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 2

УДК 534.84

АНАЛИЗ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

С. Б. Барон, А. А. Янпольский

Рассмотрены предпосылки к статистическому анализу частотной зависимости звукового давления в замкнутом объеме. Проведен расчет основных параметров, представляющих интерес для теории звукоусиления и акустических измерений в замкнутом объеме. Приведена сводка результатов расчета аналогичных параметров флюктуаций звукового давления по пространству.

Статистические частотные характеристики звукопередачи важны для решения задач озвучивания помещений и проведения в них акустических измерений. Отдельные свойства частотных характеристик замкнутых объемов рассматривались в ряде теоретических и экспериментальных работ [1—7], из которых в работе [4] получены наиболее полные теоретические результаты, в работе [6] уточнена средняя величина интервала между максимумами. О некоторых результатах статистического анализа частотной зависимости звукового давления ранее сообщалось авторами в работе [8].

В настоящей работе методами, более строгими, чем ранее применявшиеся, исследуются следующие статистические параметры частотной зависимости звукового давления: средняя скорость изменения амплитуды; среднее число положительных выбросов амплитуды, превышающих заданный уровень; средняя длительность выброса над заданным уровнем; средний интервал между выбросами амплитуды и среднее изменение фазы. Эти параметры представляют наибольший интерес для практики акустических измерений в замкнутых объемах, в том числе для измерения параметров звуковых антенн.

Искомые параметры мы будем определять вероятностными методами из ансамбля частотных зависимостей звукового давления, полученных при различных пространственных положениях источника и точки наблюдения. При этом предположим, что реализуются следующие физические условия: звуковое поле на каждой из частот исследуемого диапазона является результатом суперпозиции значительного числа составляющих, амплитуды которых малы по сравнению с амплитудой результирующего давления, а фазы равновероятны в интервале от 0 до 2π; средний по объему квадрат амплитуды звукового давления является постоянной величиной; в исследуемом диапазоне частот производительность источника и поглощение на границах объема не зависят от частоты.

При этих условиях распределение амплитуды ансамбля P подчиняется закону Рэлея [9, 10]:

$$W(P)=\frac{2P}{\overline{P^2}}\exp\left(-\frac{P^2}{\overline{P^2}}\right), \tag{1}$$

где $\overline{P^2}$ — среднее по объему значение квадрата амплитуды звукового давления. Из интегрального закона распределения следует, что диапазон изменения амплитуд звукового давления составляет ~ 10 *дб* (с вероятностью 68%), ~ 22 *дб* (с вероятностью 95%), ~ 30 *дб* (с вероятностью 99%).

Исследование основных параметров частотной зависимости мы проведем вероятностными методами статистической теории связи. Согласно аппарату последней, исходным для определения значений интересующих нас параметров является совместная плотность вероятности амплитуды давления P, фазы φ и их первых производных $\dot{P}$, $\dot{\varphi}$ при отсутствии сдвига по частоте — $W_4(P, \dot{P}, \varphi, \dot{\varphi})$.

Плотность вероятности $W_4(P, \dot{P}, \varphi, \dot{\varphi})$ можно получить по правилам теории вероятностей, исходя из следующих соображений. Вещественная p_1 и мнимая p_2 части комплексного звукового давления могут быть представлены в виде

$$p_1 = P\cos(\omega t - \varphi) = P_1 \cos\omega t + P_2 \sin\omega t,$$
$$p_2 = P\sin(\omega t - \varphi) = P_1 \sin\omega t - P_2 \cos\omega t, \qquad (2)$$

где

$$P_1 = P\cos\varphi = Q_0|K|\cos\varphi = Q_0 K_1,$$
$$P_2 = P\sin\varphi = Q_0|K|\sin\varphi = Q_0 K_2, \qquad (3)$$

$$P^2 = |p|^2 = p_1^2 + p_2^2 = P_1^2 + P_2^2 = Q_0^2|K|^2, \qquad (4)$$

$\varphi = \operatorname{arc\,tg} P_2/P_1$; $K = K_1 - iK_2$ — функция передачи объема; $Q(f) = Q_0 = \mathrm{const}$ — производительность источника, причем гармонические функции p_1 и p_2 с равномерно распределенной фазой и рэлеевской амплитудой распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \overline{P^2}/2$ [12, гл. II].

Определим совместную плотность вероятности $W_4(P_1, P_2, \dot{P}_1, \dot{P}_2)$. Функции P_1, P_2, $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$ имеют нормальную плотность вероятности, поскольку они определяются линейными комбинациями и преобразованиями нормальных процессов p_1 и p_2. Из уравнений (3) следует, что коэффициенты корреляции по частоте квадратурных составляющих амплитуд давления (P_1 и P_2) равны соответствующим коэффициентам корреляции вещественной и мнимой частей функции передачи:

$$R_{P_1P_1}(\Delta f) = R_{P_2P_2}(\Delta f) = R_{K_1K_1}(\Delta f) = R_{K_2K_2}(\Delta f),$$
$$S_{P_1P_2}(\Delta f) = -S_{P_2P_1}(\Delta f) = S_{K_1K_2}(\Delta f) = -S_{K_2K_1}(\Delta f), \qquad (5)$$

где Δf — сдвиг по частоте. Коэффициенты авто- и взаимной корреляции вещественной и мнимой частей функции передачи определяются преобразованиями Фурье от среднего по ансамблю квадрата импульсного отклика объема [7]. Тогда, учитывая равенства (5), имеем

$$R_{P_1P_1}(\Delta f) = R_{P_2P_2}(\Delta f) = R(\Delta f) = \frac{\int_0^\infty \overline{h^2}(t)\cos 2\pi\,\Delta f t\,dt}{\int_0 \overline{h^2}(t)\,dt}, \qquad (6)$$

$$S_{P_1P_2}(\Delta f) = -S_{P_2P_1}(\Delta f) = S(\Delta f) = \frac{\int_0^\infty \overline{h^2}(t)\sin 2\pi\,\Delta f t\,dt}{\int_0 \overline{h^2}(t)\,dt}. \qquad (7)$$

Корреляционная матрица четырехмерного распределения нормальных случайных процессов P_1, P_2 и их производных $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$ (при отсутствии сдвига

по частоте) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & S'(0) \\ 0 & 1 & -S'(0) & 0 \\ 0 & -S'(0) & -R''(0) & 0 \\ S'(0) & 0 & 0 & -R''(0) \end{vmatrix},$$

где

$$S'(0) = \frac{dS(\Delta f)}{d(\Delta f)}\Big|_{\Delta f=0} = 2\pi \frac{\int\limits_0^\infty t\overline{h^2}(t)\,dt}{\int\limits_0^\infty \overline{h^2}(t)\,dt}, \tag{8}$$

$$R''(0) = \frac{d^2R(\Delta f)}{d(\Delta f)^2}\Big|_{\Delta f=0} = -4\pi^2 \frac{\int\limits_0^\infty t^2\overline{h^2}(t)\,dt}{\int\limits_0^\infty \overline{h^2}(t)\,dt}. \tag{9}$$

При сделанных выше допущениях $\overline{h}^2(t) = \mathrm{const}\cdot\exp(-|t|/\tau)$; $\tau = T/13{,}82$ — постоянная затухания объема; T — время реверберации. С учетом выражения (8) и (9) получаем

$$\Delta = 16\pi^4\tau^4. \tag{10}$$

Тогда, согласно определению многомерного нормального случайного процесса [13, гл. 4], и принимая во внимание формулу (10),

$$W_4(P_1, P_2, \dot{P}_1, \dot{P}_2) = \frac{1}{4\pi^4\tau^2(\overline{P^2})^2}\exp\Big\{-\frac{1}{4\pi^2\tau^2\overline{P^2}}\big[2(2\pi\tau)^2\cdot(P_1^2+P_2^2)+$$

$$+(\dot{P}_1^2+\dot{P}_2^2)-4\pi\tau(P_1\dot{P}_2-P_2\dot{P}_1)\big]\Big\}. \tag{11}$$

Заменяя переменные в выражении (11), согласно соотношениям (3) и (4), на новые переменные P, $\dot{P}$, φ, $\dot{\varphi}$ и учитывая якобиан этого преобразования, получаем искомую плотность вероятности:

$$W_4(P, \dot{P}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{P^2}{4\pi^4\tau^2(\overline{P^2})^2}\exp\Big[-\frac{P^2}{\overline{P^2}} - \frac{(\dot{\varphi}-2\pi\tau)^2P^2+\dot{P}^2}{4\pi^2\tau^2\overline{P^2}}\Big]. \tag{12}$$

Выполнив интегрирование по φ от 0 до 2π и по $\dot{\varphi}$ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем совместную плотность вероятности амплитуды давления и ее первой производной на одной и той же частоте:

$$W_2(P, \dot{P}) = \frac{2P}{\overline{P^2}}\exp\left(-\frac{P^2}{\overline{P^2}}\right)\frac{1}{2\pi\tau(\pi\overline{P^2})^{1/2}}\exp\left(-\frac{\dot{P}^2}{4\pi^2\tau^2\overline{P^2}}\right) = W(P)\,W_1(\dot{P}). \tag{13}$$

Проинтегрировав выражение (12) по φ, P, $\dot{P}$, получим плотность вероятности производной от фазы:

$$W'(\dot{\varphi}) = 2\pi^2\tau^2[(\dot{\varphi}-2\pi\tau)^2+4\pi^2\tau^2]^{-3/2}. \tag{14}$$

Из выражения (13) следует, что производная амплитуды давления распределена по нормальному закону, причем ее среднее значение $\overline{\dot{P}}$ равно

нулю. Поэтому можно определить только среднее абсолютной величины скорости изменения амплитуды давления:

$$\overline{|v_P|}=\overline{|\dot{P}|}=\int_{-\infty}^{\infty}|\dot{P}|W_1(\dot{P})\,d\dot{P}=2\tau(\pi\overline{P^2})^{1/2}\simeq 0{,}26T(\overline{P^2})^{1/2}. \qquad (15)$$

Известно [1—3], что частотная зависимость звукового давления в объеме имеет различный вид в зависимости от скорости изменения частоты и скорости регистрации. Поэтому для получения неискаженной частотной характеристики выбор этих скоростей должен подчиняться некоторым условиям. В работе [2] определена средняя скорость изменения частоты генератора $v_{f\,\text{ген}}\leqslant\tau^2/2\pi\sqrt{3}\simeq 17{,}5/T^2$ *гц/сек*. Скорость записи определяется скоростью изменения амплитуды давления, т. е. должна быть не менее величины, определяемой выражением (15). Среднее изменение амплитуды давления $\overline{\Delta P}$ при средней ошибке в установке частоты $\overline{\Delta\nu}$ будет $\overline{\Delta P}\,/\,(\overline{P^2})^{1/2}=$ $=\overline{\Delta\nu}0{,}26T$.

Аналогичным образом определяются требования к средней за время наблюдения стабильности источника колебаний по частоте при заданном значении допустимого среднего отклонения уровня амплитуды $\overline{\delta P}$.

Среднее (на 1 *гц*) число положительных выбросов амплитуды давления над произвольным уровнем A — $\overline{N}_+(A)$, т. е. среднее число пересечений уровня A снизу вверх, определим на основании общего для стационарных процессов выражения [11]:

$$\overline{N}_+(A)=\int_0^{\infty}\dot{P}W_2(A,\dot{P})\,d\dot{P}.$$

С учетом выражений (13), (15) имеем соотношение:

$$\overline{N}_+(A)=2\tau A\left(\frac{\pi}{\overline{P^2}}\right)\exp\left(-\frac{A^2}{\overline{P^2}}\right). \qquad (16)$$

В частности, число положительных выбросов над уровнем $A=\sqrt{\overline{P^2}}$ будет $\overline{N}_+(\sqrt{\overline{P^2}})=0{,}094\ T\ 1/гц$ и над уровнем $A=\overline{P}-\overline{N}_+(\overline{P})=0{,}104\ T\ 1/гц$. Выражение (16) позволяет также определить интервал изменения частоты, при котором в среднем амплитуда достигнет заданного уровня (или средний интервал между пересечениями уровня снизу вверх). Так, при изменении частоты в среднем на $\overline{\Delta f_+}=10{,}59/T$ *гц* амплитуда давления возрастает до уровня $\sqrt{\overline{P^2}}$, при изменении на $\overline{\Delta f_+}=9{,}65/T$ *гц* достигается уровень $\overline{P}$. Кроме того, с помощью выражения (16) легко вычислить среднюю длительность выброса над заданным уровнем, т. е. средний интервал между двумя последовательными пересечениями заданного уровня, при котором амплитуда превышает уровень A (иногда этот параметр называют интервалом между «нулями»), и средний интервал частот между положительными выбросами.

Действительно, если процесс наблюдается в диапазоне частот F, то суммарная средняя ширина полосы, в пределах которой амплитуды выброса превышают заданный уровень A $\overline{F}_{P>A}=F\int_A^{\infty}W(P)\,dP$. Следовательно, средний интервал частот, приходящийся на один положительный выброс

$$\overline{\Delta f}(A)=\frac{F_{P>A}}{\overline{N}_+(A)F}=\frac{1}{\overline{N}_+(A)}\int_A^{\infty}W(P)\,dP=\frac{1}{2\tau A}(\overline{P^2})^{1/2}=\frac{3{,}9}{TA}(\overline{P^2})^{1/2}. \qquad (17)$$

Таблица

Параметр	Общее выражение	Величина на уровне $\sqrt{\overline{P^2}}$	Величина на уровне $\overline{P}$
Среднее абсолютного значения скорости изменения амплитуды	$\overline{\lvert v_P \rvert} = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\pi \overline{P^2}}{3}\right)^{1/2}$ λ — длина волны	—	—
Среднее число положительных выбросов над уровнем А (на единицу длины)	$\overline{N}_+(A) = \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{\pi}{3\overline{P^2}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{A^2}{\overline{P^2}}\right)$	$\overline{N}_+\left(\sqrt{\overline{P^2}}\right) \simeq \frac{0,753}{\lambda}$	$\overline{N}_+(\overline{P}) \simeq \frac{0,827}{\lambda}$
Средний интервал между положительными пересечениями уровня А	$\overline{\Delta r}_+(A) = \frac{\lambda}{2A}\left(\frac{3\overline{P^2}}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{A^2}{\overline{P^2}}\right)$	$\overline{\Delta r}_+\left(\sqrt{\overline{P^2}}\right) \simeq 1,327\,\lambda$	$\overline{\Delta r}_+(\overline{P}) \simeq 1,209\lambda$
Средний интервал между положительными выбросами	$\overline{\Delta r}_и(A) = \frac{\lambda}{2A}\left(\frac{3\overline{P^2}}{\pi}\right)^{1/2}\left[\exp\left(\frac{A^2}{\overline{P^2}}\right) - 1\right]$	$\overline{\Delta r}_и\left(\sqrt{\overline{P^2}}\right) \simeq 0,839\lambda$	$\Delta r_и(\overline{P}) \simeq 0,658\lambda$
Средняя протяженность отдельного выброса над уровнем А	$\overline{\Delta r}(A) = \frac{\lambda}{2A}\left(\frac{3\overline{P^2}}{\pi}\right)^{1/2}$	$\overline{\Delta r}\left(\sqrt{\overline{P^2}}\right) \simeq 0,488\lambda$	$\overline{\Delta r}(\overline{P}) \simeq 0,551\lambda$
Среднее абсолютного значения изменения фазы	$\overline{\lvert \dot{\varphi} \rvert} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot 3^{1/2}} \simeq \frac{3,630}{\lambda}$		
Среднее число максимумов на единицу длины	$\overline{N}_m = \frac{4}{135\lambda}\left(2\pi 5^{1/2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{7}{4}\right)} \frac{B_n}{\left(\frac{9}{5}\right)^n} \simeq \frac{1,282}{\lambda}$ $B_0 = 1,0;\ B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{m!}(n-m+1)\cdot 0,6^m$	—	—
Средний интервал между максимумами	$\overline{\Delta r}_m \simeq 0,780\,\lambda$	—	—

Продолжение табл.

Параметр	Общее выражение	Величина на уровне $\sqrt{\overline{P^2}}$	Величина на уровне $\overline{P}$
Средняя высота максимумов относительно среднеквадратичного значения давления	$\bar{h}_m = \frac{[2(a^2-1)]^{1/2}}{a} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{5}{4}\right) B_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{7}{4}\right) a^n}} \simeq 4{,}68\ дб$ $a^2 = \frac{d^4 R(\Delta r)}{d(\Delta r)^4}\Big\vert_{\Delta r=0} \Big/ \left[\frac{d^2 R(\Delta r)}{d(\Delta r)^2}\Big\vert_{\Delta r=0}\right]^2 = \frac{9}{5}$ $R(\Delta r)$ — κ-m корреляции вещественной (мнимой) части давления по пространственному интервалу Δr	—	—

Из формулы (17) видно, что с возрастанием уровня уменьшается средняя длительность выброса. В частности, интервал между двумя последовательными пересечениями уровня $\sqrt{\overline{P^2}}$ будет $\overline{\Delta f}(\sqrt{\overline{P^2}}) = 3{,}9 / T$ *гц* и уровня $\overline{P}$ — $\overline{\Delta f}(\overline{P}) \neq 4{,}4/T$ *гц*. В работе [4] интервал между пересечениями уровня $\overline{P^2}$ определяется как $0{,}5 / \overline{N}_+(P^2) \simeq 5 / T$. Из общих соображений, подтверждаемых формулой (17), ясно, что $\overline{\Delta f} = 0{,}5 / \overline{N}_+$ только для средней длительности выброса над медианным уровнем. Аналогичным образом получается выражение для среднего интервала частот между положительными выбросами:

$$\overline{\Delta f_и} = \frac{1}{\overline{N}_+(A)} \int_0^A W(P)\, dP =$$

$$= \frac{1}{2\tau A}\left(\frac{\overline{P^2}}{\pi}\right)^{1/2}\left[\exp\left(\frac{A^2}{\overline{P^2}}\right) - 1\right],$$

или же, как ясно из общих соображений, $\overline{\Delta f_и}(A) = \overline{\Delta f_+}(A) - \overline{\Delta f}(A)$. В частности, интервал между положительными выбросами над уровнем $\sqrt{\overline{P^2}}$ будет $\Delta f_и(\sqrt{\overline{P^2}}) = 6{,}7 / T$ *гц* и над уровнем $\overline{P} - \overline{\Delta f_и}(\overline{P}) = 5{,}25 / T$ *гц*.

Среднее значение изменения фазы, или средний угол поворота вектора комплексного звукового давления, при изменении частоты на 1 *гц*, с учетом формулы (14) определяется выражением: $\overline{v_\varphi} = \overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi W'(\varphi)\, d\varphi = 2\pi\tau \simeq 0{,}45\, T$ *рад/гц*. Величина среднего угла поворота, приведенная в работе [4], в $\sqrt{2}$ раз превышает этот результат. Однако принятые в работе [4] допущения фактически приводят к определению другой величины — среднего абсолютного значения угла поворота. Действительно, среднее значение абсолютной величины изменения фазы, согласно выражению (14)

$$\overline{|v_\varphi|} = \overline{|\varphi|} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi| W'(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\, 2\pi\tau \simeq 0{,}64\, T \ \ рад/гц.$$

Средний интервал между максимумами рассмотрен в работе [6] и составляет $\overline{\Delta f_m} = (3{,}91 \pm 0{,}04)/T$ *гц*.

На основании проведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы: статистические параметры частотной зависимости звукового давления определяются через величину времени реверберации объема; результаты статистического анализа параметров частотной зависимости позволяют определить время реверберации объема в стационарном режиме; при акустических измерениях результаты анализа позволяют предъявлять требования к динамическому диапазону аппаратуры, к скорости регистрации процесса, к стабильности по частоте генератора излучаемого сигнала, к точности установки частоты.

В заключение отметим, что аналогичными методами определяются статистические параметры флюктуаций звукового давления по пространству замкнутого объема, играющие существенную роль в ряде задач измерительной практики. Эти параметры позволяют, например, восстановить в среднем характер флюктуаций поля, определить скорость регистрации при измерении пространственной неравномерности, предъявлять требования к точности установки приемника и т. д.

В случае анализа пространственных флюктуаций корреляционная матрица соответствующего исходного многомерного закона распределения превращается в диагональную и в выражениях, аналогичных (12), (14), исчезают вторые члены в круглых скобках.

Основные результаты анализа (в том числе ранее приведенные авторами в [8]) представлены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. Wente. Characteristics of sound transmission in rooms. J. Acoust. Soc. America, 1935, **7**, 123.
2. R. H. Bolt, R. W. Roop. Frequence response fluctuations in rooms. J. Acoust. Soc. America, 1950, **22**, 280—289.
3. Л. Беранек. Акустические измерения. М., ИЛ, 1952.
4. M. R. Schroeder. Die statistischen Parameter der Frequenzkurven in großen Räumen. Acustica, 1954, **4**, 594—600.
5. K. H. Kuttruff, R. Thiele. Über die Frequenzabhängingkeit des Schalldrucks in Räumen. Acustica, 1954, **4**, 614—617.
6. M. R. Schroeder, K. H. Kuttruff. On frequence response curves in rooms. J. Acoust. Soc. America, 1962, **34**, 76—80.
7. M. R. Schroeder. Frequence correlation functions of frequency responses in rooms. J. Acoust. Soc. America, 1962, **34**, 1819.
8. С. Б. Барон, А. А. Янпольский. Звуковое поле и измерения в замкнутых объемах. Докл. на VI Всес. конференции, 1968.
9. J. W. Reyleigh. On the problem of random vibrations and of random frights in one, two, on three dimensions. Phil. Mag., 1919, **37**, 321.
10. P. Beckmann. Reyleigh distribution and its generalizations. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1964, **D68**, 9, 927—932.
11. S. O. Rice. Mathematical anolysis of random noise. BSTY J. 1943, **24**, 1, 46—156. (Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сб. переводов под ред. Н. А. Железнова, 1953.)
12. В. И. Бунимович. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М., «Сов. радио», 1951.
13. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1966.

Ленинград

Поступила в редакцию
20 июня 1968 г.