

К ДИНАМИКЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

А. Ю. Максимов, Б. Н. Максимов, Г. Д. Михайлов

В работе [1] было выведено уравнение, которое описывает распространение плоских волн конечной амплитуды в диссипативной среде в квадратичном приближении. Представляет интерес получить уравнение, описывающее распространение плоских волн конечной амплитуды с учетом членов третьего порядка малости включительно. Это уравнение легко получается при использовании метода, разработанного в работе [1], и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = b \frac{\partial}{\partial \tau}(u^2) + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + A_1 \frac{\partial}{\partial \tau}(u^3) + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(u^2) + A_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + A_4 \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + O(u^4). \quad (1)$$

Первые два члена в правой части уравнения (1) являются членами второго порядка и совпадают с соответствующими членами правой части уравнения, введенного в работе [1]. Следующие три члена являются членами третьего порядка. Мы будем рассматривать случай $Re \ll 1$, когда доминирующим среди членов третьего порядка будет член $A_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}$. Здесь u — акустическая скорость,

$$z = kx, \quad \tau = \omega t - kx, \quad \omega = kc_0, \quad b = \frac{\gamma + 1}{4c_0},$$

$$\delta = \beta k, \quad \beta = \frac{1}{2c_0} \left(\frac{b_1}{\rho_0} + \frac{\nu - 1}{\gamma} \frac{\kappa}{\rho_0 c_v} \right),$$

η_1 — коэффициент сдвиговой вязкости, κ — коэффициент теплопроводности

$$A_1 = -\frac{(\gamma + 1)^2}{12c_0^2}, \quad A_2 = -\frac{(3\gamma + 5)}{4c_0^2} \beta \omega, \quad A_3 = (F - \beta^2) k^2, \quad A_4 = [2\beta - c_0 \cdot G] \frac{\omega}{c_0^2},$$

$$F = -\frac{1}{8c_0^2} \left[\left(\frac{b_1}{\rho_0} \right)^2 + 6 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{b_1}{\rho_0} \frac{\kappa}{\rho_0 c_v} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 5)}{\gamma^2} \left(\frac{\kappa}{\rho_0 c_v} \right)^2 \right],$$

$$G = -\frac{1}{8c_0^2} \left[\frac{4(\gamma - 1)b_2 + (\gamma + 1)b_1}{\rho_0} + \frac{(\gamma - 1)(5\gamma - 3)}{\gamma} \frac{\kappa}{\rho_0 c_v} \right],$$

$$b_1 = \frac{4}{3}\eta + \xi; \quad b_2 = \frac{8}{9}\eta + \xi,$$

ξ — коэффициент объемной вязкости.

Будем решать уравнение (1) при следующих условиях:

$$u(z = 0, \tau) = u_0 \sin \tau. \quad (2)$$

Сделаем обычную подстановку $w(z, \tau) = e^{A \int u d\tau}$

$$u = \frac{1}{A} \frac{\partial w / \partial \tau}{w}, \quad A = \frac{b}{\delta} = \frac{\gamma + 1}{4\beta \omega}.$$

Тогда функция w будет удовлетворять следующему нелинейному интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3} + D_3 \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^3}{w} + D_4 \frac{\frac{\partial w}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}}{w} + D_5 w \int \frac{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} w - \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 \right]^2}{w^2} d\tau. \quad (3)$$

Коэффициенты D_i , $i = 1, 2, 3, 4$ легко выражаются через коэффициенты A_i , b , δ . В частности, $D_1 = \delta$, $D_2 = A_3$. Граничное условие (2) принимает теперь вид

$$w(z = 0, \tau) = e^{-m_0 \cos \tau}, \quad (4)$$

где $m_0 = Au_0 = u_0 \frac{\gamma + 1}{4\beta \omega} = \frac{\gamma + 1}{2} Re.$

Оценка членов уравнения (3) показывает, что при достаточно малых числах Рейнольдса главным членом среди членов третьего порядка малости будет член $D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3}$.

Поэтому из членов третьего порядка мы сохраняем только этот член. Таким образом, мы удерживаем члены второго порядка с нелинейностью и диссипацией и учитываем поправку на диссипацию в третьем приближении. В результате мы получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения при граничном условии (4) имеет вид

$$W(z, \tau) = J_0(m_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(m_0) e^{-n^2 D_1 z} \cdot \cos(n\tau - n^3 D_2 z). \quad (6)$$

В том случае, когда не учитываются члены третьего порядка, т. е. когда $D_2 = 0$, получаем известное решение Мендоуса [2].

В выражениях для w и $\partial w / \partial \tau$ раскладываем функции Бесселя $J_n(m_0)$ в ряды по степеням $m_0 \ll 1$ и удерживаем первые члены разложения. Далее, подставив полученные разложения в формулу

$$u = \frac{u_0}{m_0} \frac{\partial w / \partial \tau}{w},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_0} = & e^{-D_1 z} \sin(\tau - D_2 z) + \frac{m_0}{2} [e^{-2D_1 z} \sin(2\tau - 2D_2 z) - e^{-4D_1 z} \sin(2\tau - 8D_2 z)] + \\ & + \frac{m_0^2}{4} \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-D_1 z} + e^{-3D_1 z} \right) \sin(\tau - D_2 z) - \frac{1}{2} e^{-5D_1 z} \sin(\tau - 7D_2 z) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} e^{-5D_1 z} \sin(3\tau - 9D_2 z) + e^{-3D_1 z} \sin(3\tau - 3D_2 z) + \frac{1}{2} e^{-9D_1 z} \sin(3\tau - 27D_2 z) \right] + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим члены, относящиеся к первой гармонике. Из формулы (7) найдем

$$\left(\frac{u}{u_0} \right)_1 = A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = & e^{-D_1 z} \cos D_2 z + \frac{m_0^2}{4} \left[\left(-\frac{1}{2} e^{-D_1 z} + e^{-3D_1 z} \right) \cos D_2 z - \frac{1}{2} e^{-5D_1 z} \cos 7D_2 z \right], \\ B_1 = & -e^{-D_1 z} \sin D_2 z + \frac{m_0^2}{4} \left[\left(\frac{1}{2} e^{-D_1 z} - e^{-3D_1 z} \right) \sin D_2 z + \frac{1}{2} e^{-5D_1 z} \sin 7D_2 z \right]. \end{aligned}$$

Представим выражение (8) в форме

$$\left(\frac{u}{u_0} \right)_1 = \varepsilon_1 \sin(\tau + \sigma_1), \quad (9)$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $\operatorname{tg} \sigma_1 = B_1 / A_1$, тогда амплитуда первой гармоники ε_1 и сдвиг фазы σ_1 определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & e^{-D_1 z} + \frac{m_0^2}{4} \left[-\frac{1}{2} e^{-D_1 z} + e^{-3D_1 z} - \frac{1}{2} e^{-5D_1 z} \cos 6D_2 z \right], \\ \operatorname{tg} \sigma_1 = & \operatorname{tg} D_2 z \left[-1 + \frac{m_0^2 e^{-4D_1 z} \sin 6D_2 z}{4 \sin 2D_2 z} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, при учете диссипативного члена третьего порядка мы получим, что скорость распространения первой гармоники зависит от расстояния. Аналогичное явление пространственной дисперсии происходит и у высших гармоник.

Из формулы (10) видно, что амплитуда первой гармоники модулирована по пространству частотой $\Omega_1 = 6D_2 \frac{k}{c_0}$. Явление пространственной осцилляции амплитуды имеет место и у высших гармоник.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде. Вестн. МГУ, 1961, 3, 52—61.
2. I. S. Mendousse, Nonlinear dissipative distortion on progressive sound waves of moderate amplitudes. J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 1, 51—54.

Институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова
Москва

Поступило в редакцию
30 мая 1969 г.

УДК 534.222

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА В ТРУБЕ РИЙКЕ

В. Н. Марченко, В. И. Тимошенко

Эффект Рийке известен как явление возбуждения звука в вертикальной трубе при наличии в ней воздухопрозрачного нагревателя, помещенного на расстоянии $1/4$ длины трубы от нижнего ее конца [1]. Колебания в трубе Рийке представляют собой типичный автоколебательный процесс, энергия которого отбирается от нагревателя. Механизм обратной связи состоит в воздействии звуковых колебаний на теплоотвод от нагревателя.

В работе [2] детально исследованы зоны генерации в трубе Рийке. Ниже приводятся результаты экспериментального исследования амплитудных, частотных и временных характеристик эффекта термической генерации звука в трубе Рийке.

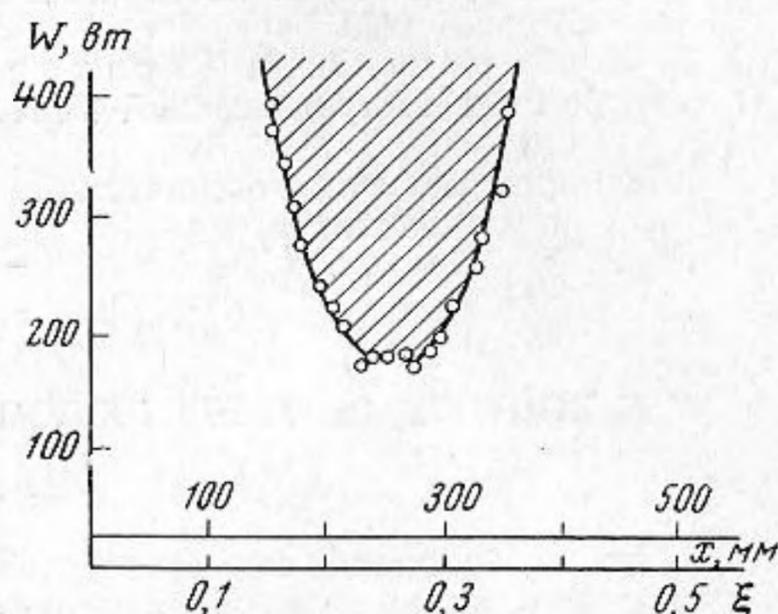
Экспериментальная установка содержит трубу, нагреватель и приемник звукового давления*, сигнал которого усиливается селективным вольтметром В6-2 и наблюдается на осциллографе С1-4. Труба (длина $L = 955$ мм, внешний диаметр 65 мм, толщина стенок 2,5 мм) изготовлена из плавленного кварца; термостойкость, твердость, хорошие электроизоляционные свойства и прозрачность этого материала создают ряд конструктивных удобств. Нагреватель был собран из нихромовой спирали (диаметр проволоки 0,56 мм, диаметр витка 6 мм), подвешенной в виде параллельных полос поперек трубы на тонких керамических стержнях, вставленных в кварцевое кольцо.

Как показали эксперименты, электрическая мощность, необходимая для возбуждения звука (назовем ее пороговой), зависит от положения нагревателя в трубе. График зависимости пороговой электрической мощности W нагревателя от его относительного смещения $\xi = x/L$, где x — положение нагревателя от нижнего края трубы, образует зону генерации (заштрихованная область на фиг. 1). Возбуждение колебаний вне этой зоны не происходит, так как не выполняется необходимое для любого генератора условие баланса амплитуд и фаз.

Как показали измерения, в спектре термической генерации присутствуют значительные по величине колебания первой (основной), второй и третьей гармоник с частотами соответственно 180, 360 и 540 гц, причем величина второй гармоники существенно изменялась при изменении положения нагревателя, что иллюстрируется кривой фиг. 2, где представлена зависимость отношения p_2/p_1 звуковых давлений второй и первой гармоник у основания трубы в функции относительного смещения нагревателя ξ в пределах зоны генерации. Характер экспериментальной кривой фиг. 2 совпадает с характером изменения колебательной скорости второй гармоники вблизи расположения нагревателя, что указывает на существенную роль колебательной скорости при возбуждении звука в трубе Рийке.

В спектре частот, возбуждаемых в трубе Рийке, обнаружены также колебания с частотой, равной $1/3$ от основной. Амплитуда субгармоники при $\xi = 0,25$ составляет примерно 0,8 от амплитуды на основной частоте. Появление субгармоники связано, по-видимому, с нелинейностью процесса термической генерации звука.

Процесс установления колебаний в трубе Рийке обладает некоторой инерционностью относительно момента подачи напряжения на нагреватель и зависит от положения последнего. Так, на фиг. 3 кривая I показывает зависимость времени t установления колебаний относительно момента подачи напряжения на нагреватель при $W = 385$ вт от относительного смещения нагревателя. Инерционность процесса



Фиг. 1

* Сферический звукоприемник из керамики титаната бария диаметром 16 мм.