АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 4

УДК 534.8

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ЛИНЗ

И. Н. Каневский, Б. С. Суриков

Проведен расчет коэффициента усиления звукового давления и колебательной скорости для замкнутых однородных линз, обладающих фазовой аберрацией произвольной величины, и установлено существование предельного значения коэффициента усиления.

Акустические линзы в виде сплошного цилиндра с постоянным показателем преломления — замкнутые однородные цилиндрические линзы — обладают фазовой аберрацией, которая исследована в работе [1]. Наличие фазовой аберрации приводит к изменению распределения звукового давления и колебательной скорости в фокальной области по сравнению с идеальной безаберрационной линзой. Это вызывает уменьшение коэффициентов усиления давления и скорости, под которыми понимаются отношения

$$K_p = \frac{|p(0)|}{p_0}, \quad K_v = \frac{|v(0)|}{v_0}, \tag{1}$$

где $|p(0)|$ и $|v(0)|$ — модули амплитуд звукового давления и колебательной скорости на фокальной оси линзы, а p_0 и v_0 — амплитуды давления и скорости на цилиндре сравнения, относительно которого отсчитывается фазовая аберрация сходящегося волнового фронта.

Влияние малых аберраций на снижение интенсивности звукового поля в фокусе замкнутых однородных цилиндрических линз исследовано в работе [1]. В настоящей работе исследуется зависимость коэффициентов усиления звукового давления и колебательной скорости от величины фазовой аберрации, которая может быть произвольной.

Предположим, что волновые сопротивления материала линзы и среды близки, а угол раскрытия сходящегося волнового фронта мал, так что $\sin\alpha_m \approx \alpha_m$. Обоснованность этих предположений показана в работе [2], где аналогичная задача решена для замкнутых однородных сферических линз. При сделанных предположениях выражения для относительного распределения звукового давления и колебательной скорости совпадают и принимают вид [3]

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v}{v_0} = \sqrt{kf/2\pi}\, e^{-i(kf-\pi/4)} \int\limits_{-\alpha_m}^{\alpha_m} e^{i\varphi(\alpha)} e^{ikr_0\cos(\alpha-\alpha_0)} d\alpha, \tag{2}$$

где $k = k_0 n$ — волновое число в материале линзы, k_0 — волновое число в среде, n — показатель преломления материала, f — радиус цилиндра сравнения, относительно которого отсчитывается фазовая аберрация $\varphi(\alpha)$, α — текущая угловая координата, r_0 и α_0 — полярные координаты точки наблюдения с полюсом на фокальной оси линзы. Согласно работе [1], $f = R\sqrt{2}$ (R — радиус линзы), а фазовая аберрация с точностью, не меньшей 5%,

может быть представлена в виде

$$\varphi(\alpha) = K_0 R\left[(2-n)\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{2}\right] = \frac{4\beta}{\eta^2}\left(\eta\frac{\alpha^2}{\alpha_m^2} - \frac{\alpha^4}{\alpha_m^4}\right), \tag{3}$$

где

$$\beta = \frac{k_0 R \alpha_m^4 \eta^2}{8}, \tag{4}$$

$$\eta = \frac{2(2-n)}{\alpha_m^2}. \tag{5}$$

Из формулы (3) следует, что величина $\varphi(\alpha)$ достигает максимума при $\alpha = \alpha_m\sqrt{\eta/2}$, причем $\varphi_{\max} = \beta$. Таким образом, величина β имеет простой физический смысл: это максимальное значение фазовой аберрации на сходящемся волновом фронте.

Полагая в выражении (2) $r_0 = 0$, вводя новую переменную $t = \alpha/\alpha_m$ и учитывая определения (1), получим

$$K = \sqrt{kf/2\pi}\,\alpha_m e^{-i(kf-\pi/4)} \int_{-1}^{1} e^{\frac{4i\alpha t^2}{\eta}(1-t^2/\eta)}\,dt, \tag{6}$$

где $K = K_p = K_v$. Модуль выражения (6) при $\beta = 0$

$$K_0 = \sqrt{2kf/\pi\alpha_m}, \tag{7}$$

и совпадает с коэффициентом усиления звукового давления и колебательной скорости цилиндрического волнового фронта с малым углом раскрытия [4]. С учетом формулы (7) модуль выражения (5) равен

$$K = K_0|A(\beta)|, \tag{8}$$

где

$$A(\beta) = \int_0^1 e^{\frac{4i\beta t^2}{\eta}\left(1-\frac{t^2}{\eta}\right)}\,dt. \tag{9}$$

Для вычисления интеграла (9) сделаем замену переменной $u = t^2/\eta$ и разложим подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{u}}e^{4i\beta u(1-u)} = \frac{\sqrt{\eta}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4i\beta)^n}{n!}u^{n-1/2}(1-u)^n.$$

Так как ряд сходится абсолютно и равномерно, его можно интегрировать почленно. В результате интегрирования получим

$$A(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}(4i\beta)^n a_n(\eta). \tag{10}$$

В этом выражении

$$a_n(\eta) = \frac{\sqrt{\eta}}{2n!}(I_{1n} + I_{2n}), \tag{11}$$

$$I_{1n} = \int_0^1 u^{n-1/2}(1-u)^n du, \tag{12}$$

$$I_{2n} = \int_1^{1/\eta} u^{n-1/2}(1-u)^n du. \tag{13}$$

Интеграл (12) представляет бэта-функцию Эйлера [5]

$$I_{1n} = B\left(n + \frac{1}{2}; n + 1\right) = \frac{\Gamma(n + {}^1/_2)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n + {}^3/_2)} = 2n!\,\frac{({}^1/_2)_n}{({}^3/_2)_{2n}}, \qquad (14)$$

где $(q)_n = \Gamma(n+q)\,/\,\Gamma(q)$, а интеграл (13) заменой переменной $z = 1 - u$ приводится к виду

$$I_{2n} = -I_{-\xi}\left(n+1; n + \frac{1}{2}\right) B\left(n+1,\ n + \frac{1}{2}\right). \qquad (15)$$

Здесь

$$\xi = \frac{1-\eta}{\eta}, \qquad (16)$$

$$B_\xi(p, q) = \int_0^\xi z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz$$

— неполная бэта-функция [5]. Функция $I_\xi(p, q) = B_\xi(p, q)\,/\,B(p, q)$ табулирована для положительных значений $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и $p, q \leqslant 50$ [6]. Используя выражения (11), (14) и (15), получим следующую формулу для расчета коэффициентов $a_n(\eta)$ ряда (10):

$$a_n(\eta) = \sqrt{\eta}\,\frac{({}^1/_2)_n}{({}^3/_2)_{2n}}\left[1 - I_{-\xi}(n+1; n + {}^1/_2)\right]. \qquad (17)$$

Если величина $\xi \leqslant 0$, то по формулам (10) и (17) можно рассчитать величину $A(\beta)$, используя таблицы функций $I_\xi(p, q)$ [6]. В этом случае, согласно (5) и (16) $\eta = 2(2-n)\,/\,\alpha_m^2 \geqslant 1$, $n \leqslant (2 - \alpha_m^2\,/\,2)$.

Если $\xi = 0$, то $I_{-\xi}(n+1;\ n + {}^1/_2) \equiv 0$, и выражение (10) упрощается:

$$A(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (4i\beta)^n \frac{({}^1/_2)_n}{({}^3/_2)_{2n}}. \qquad (18)$$

В этом случае $\eta = 1$, $n = 2 - \alpha_m^2\,/\,2$.

Для значений $\xi \geqslant 0$, когда $\eta \leqslant 1$ и $n \geqslant (2 - \alpha_m^2\,/\,2)$, функция $I_{-\xi}(p, q)$ не табулирована. Между тем, этот случай представляет наибольший интерес, так как включает значение $\xi = {}^1/_6$, соответствующее оптимальному значению показателя преломления $n_{\text{опт}} = 2 - 3\alpha_m^2\,/\,7$, при котором среднеквадратичная фазовая аберрация минимальна [1]. Вследствие этого возникает необходимость вычислить интеграл (15). Представив подынтегральное выражение в формуле (15) в виде ряда по степеням z с помощью разложения бинома [5], и проинтегрировав этот ряд почленно, получим

$$I_{2n} = \frac{(-1)^n \xi^{n+1}}{n+1} F\left(n+1; \frac{1}{2} - n; n+2; -\xi\right), \qquad (19)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция [5]. Применяя к ней соотношение [5]

$$F(a, b, c, z) = (1-z)^{-b} F\left(c - a, b, c, \frac{-z}{1-z}\right),$$

и учитывая, что согласно формуле (19) параметры $a = n+1$, $b = {}^1/_2 - n$, $c = n+2$, а согласно формуле (16) $\xi\,/\,(1+\xi) = 1 - \eta$, представим формулу (19) в виде

$$I_{2n} = \frac{(1-\eta)}{2\sqrt{\eta}} \cdot \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^n f_n(\eta). \qquad (20)$$

В этом выражении

$$f_n(\eta) = F\left(1; \frac{1}{2} - n; n+2; 1-\eta\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - n\right)_k}{(n+2)_k} (1-\eta)^k. \qquad (21)$$

Используя соотношения (11), (14) и (20), получим формулу для расчета коэффициентов ряда (10), когда $\xi \geqslant 0$:

$$a_n(\eta) = \sqrt{\eta}\, \frac{(^1/_2)_n}{(^3/_2)_{2n}} + \frac{(1-\eta)}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^n f_n(\eta). \qquad (22)$$

При $\beta \ll 1$, когда угол раскрытия сходящегося волнового фронта мал, в разложении (10) можно ограничиться первыми тремя членами, соответствующими значениям $n = 0$, 1 и 2:

$$A(\beta) \approx 1 + 4i\beta\left(\frac{1}{3\eta} - \frac{1}{5\eta^2}\right) - 8\beta^2\left(\frac{1}{5\eta^2} - \frac{2}{7\eta^3} + \frac{1}{9\eta^4}\right). \qquad (23)$$

Первый член этого выражения, равный единице, соответствует случаю отсутствия фазовой аберрации, когда $\beta = 0$. Второй и третий члены представляют поправку, учитывающую в первом приближении влияние фазовой аберрации. Беря модуль выражения (23) и ограничиваясь квадратичными членами по β, получим приближенное выражение для отношения коэффициентов усиления:

$$\frac{K}{K_0} = |A(\beta)| = 1 - \frac{32\beta^2}{15\eta^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{7\eta} + \frac{4}{15\eta^2}\right). \qquad (24)$$

Полученные выше формулы (10) и (22) позволяют рассчитать зависимость коэффициента усиления от величины фазовой аберрации при любом значении последней, и установить пределы применимости формулы для среднеквадратичной фазовой аберрации, полученной в работе [1].

На фиг. 1 кривая *1* изображает зависимость $K/K_0 = |A(\beta)|$, рассчитанную по формулам (10) и (22) для значения $\eta = 6/7$, соответствующего оптимальному показателю преломления. При $\beta \leqslant 5$ сумма первых 12 членов ряда (10) описывает величину $A(\beta)$ с погрешностью не более 0,5%.

В работе [1] приведено полученное с помощью критерия среднеквадратичной фазовой аберрации выражение для расчета снижения интенсивности I в фокусе однородной цилиндрической линзы:

$$\frac{I}{I_0} = 1 - E_0 = 1 - \frac{K_0^2 R^2 \alpha_m^8}{690}.$$

Отсюда, учитывая формулу (4), получим приближенное выражение для отношения коэффициентов усиления

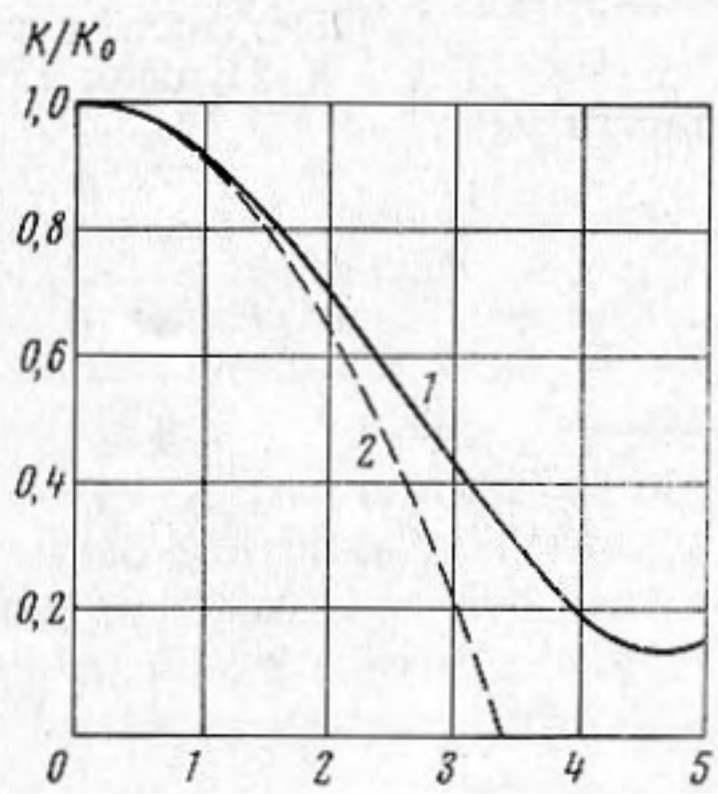
$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{\beta^2}{11{,}6}. \qquad (25)$$

Это же выражение получается из формулы (24), если положить в ней $\eta = 6/7$. Зависимость K/K_0 от β, рассчитанная по формуле (25), показана на фиг. 1, кривой *2*. При $\beta \leqslant 2$, когда падение коэффициента усиления не превышает 30%, расхождение между точной кривой *1* и приближенной *2* составляет не более 7%. Таким образом, в практически интересных случаях можно пользоваться критерием среднеквадратичной фазовой аберрации и связанной с ним простой формулой (25).

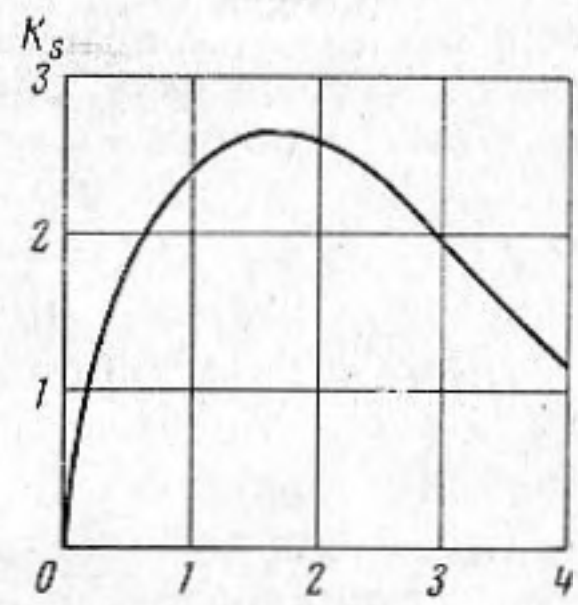
Интересно сопоставить формулу (25) с приближенным выражением величины K / K_0 однородной сферической линзы, полученным в работе [2]:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{\beta^2}{22{,}5}, \tag{26}$$

где величина β также равна максимальному значению фазовой аберрации на сходящемся волновом фронте. Из сравнения формул (25) и (26) следует, что при одинаковых значениях фазовой аберрации падение коэффициента усиления цилиндрической линзы примерно в два раза больше, чем сферической линзы.



Фиг. 1



Фиг. 2

В работе [2] было установлено, что для однородных сферических линз существует предельное значение коэффициента усиления, обусловленное фазовой аберрацией. Аналогичная ситуация наблюдается и для цилиндрических линз. Действительно, используя формулы (4), (7) и (8) и вводя величину $s = \alpha_m \eta / \sqrt{n}$, получим

$$K \cdot s = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{\beta}\, |A(\beta)|. \tag{27}$$

Из графика зависимости Ks от β (см. фиг. 2), построенного по формуле (27), видно, что при $\beta = 1{,}75$ достигается максимальное значение $Ks = 2{,}65$. Следовательно, для фиксированного угла раскрытия волнового фронта существует предельный коэффициент усиления однородной цилиндрической линзы $K_{\text{пред}}$. При $\eta = 6/7$

$$K_{\text{пред}} = \frac{2{,}65}{s} = \frac{3{,}09\sqrt{n}}{\alpha_m}. \tag{28}$$

Подставляя в выражение (4) значение $\beta = 1{,}75$ и $k_0 = 2\pi / \lambda_0$, $R = D / 2$, где D — диаметр линзы, λ_0 — длина волны в среде, представим формулу (28) в виде

$$K_{\text{пред}} \approx 2\sqrt{n}\sqrt[4]{D/\lambda_0}.$$

Таким образом, предельный коэффициент усиления пропорционален корню четвертой степени из отношения D / λ_0, тогда как коэффициент усиления безаберрационной линзы $K_0 \sim \sqrt{D / \lambda_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Каневский, Б. С. Суриков. Однородные сферические и цилиндрические линзы для фокусирования звуковых волн. Акуст. ж., 1970, **17**, 1, 55—60.
2. И. Н. Каневский, Б. С. Суриков. Звуковое поле в фокальной области однородных сферических линз. Акуст. ж., 1971, **17**, 2, 247—253.
3. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, **3**, 1, 46—61.
4. Л. Д. Розенберг. Расчет усиления звуковых цилиндрических фокусирующих систем. Акуст. ж., 1955, **1**, 1, 70—77.
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.
6. K. Pearson. Tables of the incomplete Beta — Function. Biometrica, Cambridge, 1934.

Государственный н.-и. и
проектный
институт редкометаллической промышленности
Москва

Поступила в редакцию
27 июля 1970 г.