

УДК 532.013.4

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников

Исследованы бесконечно малые возмущения плоского тангенциального разрыва в сжимаемой среде. Показано, что существует три разных типа возмущений вида плоских монохроматических волн, связанных определенным образом друг с другом.

Исследование неустойчивости тангенциального разрыва представляет большой интерес для ряда практически важных задач, например, для снижения шумообразования струй. Хотя исследование случая плоского тангенциального разрыва в сжимаемой среде проводилось неоднократно (см., например, [1—3]), однако оно не было достаточно полным. Целесообразно поэтому более подробно проанализировать неустойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой среде относительно бесконечно малых возмущений и рассмотреть более близкие к реальным ситуациям случаи плоскопараллельного слоя и цилиндрической струи. Поскольку, однако, картина устойчивых и неустойчивых возмущений и их связи друг с другом получается довольно сложной, необходимо начать рассмотрение с геометрически более простого случая плоского тангенциального разрыва. В дальнейшем следует подобным же образом рассмотреть плоскопараллельный слой и цилиндрическую струю.

Сформулируем задачу о неустойчивости плоского тангенциального разрыва. Систему координат выберем так, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с поверхностью тангенциального разрыва между покоящейся средой 1 ($z < 0$) и движущейся средой 2 ($z > 0$). Проекцию вектора скорости v движущейся среды на ось x обозначим через u , а отношение u/c — через β :

$$\beta = u/c = v \cos \theta / c. \quad (1)$$

Здесь θ — угол между осью x и вектором v . Ради простоты будем считать среды одинаковыми, что выражается в равенстве плотностей ρ и скоростей звука c в них.

Возмущения исходного движения положим бесконечно малыми, т. е. будем решать задачу в линейном приближении. Решения для потенциалов скоростей Φ произвольного возмущения можно представить как суперпозицию волн вида

$$\Phi_1 = A_1 \exp(-i\omega t + ikx + ik_1 z), \quad \Phi_2 = A_2 \exp(-i\omega t + ikx + ik_2 z) \quad (2)$$

соответственно в средах 1 и 2. Частота возмущения ω и проекция k волнового вектора на ось x в обеих средах одинаковы, поскольку задача однородна во времени t и в пространстве по оси x (и y). Величину k всюду в дальнейшем считаем действительной (среда безгранична по оси x в обе стороны). Неустойчивым возмущениям отвечают решения с комплексными значениями ω . Подставляя выражения (2) в волновое уравнение, которое

для движущейся среды имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\} \Phi_2 = 0, \quad (3)$$

получим дисперсионные уравнения, связывающие ω , k_1 , k_2 , k :

$$(\omega / kc)^2 = 1 + (k_1 / k)^2, \quad (\omega / kc - \beta)^2 = 1 + (k_2 / k)^2. \quad (4)$$

Граничные условия равенства давлений и нормальных скоростей на поверхности тангенциального разрыва имеют соответственно вид

$$\left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi \right] = 0, \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right] = 0 \quad (5)$$

при $z = 0$. Квадратные скобки в формуле (5) обозначают разность значений заключенных в них величин для граничащих друг с другом сред. Подставляя выражения (2) в граничные условия (5), мы получим систему двух уравнений, связывающих амплитуды возмущений A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} (\omega / kc) A_1 - (\omega / kc - \beta) A_2 &= 0, \\ (\omega / kc - \beta) (k_1 / k) A_1 - (\omega / kc) (k_2 / k) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для существования нетривиальных решений $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ однородной системы уравнений (6) необходимо, чтобы ее детерминант был равен нулю. Из этого условия получим дисперсионное соотношение

$$(\omega / kc)^2 (k_2 / k) = (\omega / kc - \beta)^2 (k_1 / k). \quad (7)$$

Систему трех алгебраических уравнений (4) и (7) для трех неизвестных ω / kc , k_1 / k , k_2 / k можно свести к одному алгебраическому уравнению шестой степени относительно ω / kc и двенадцатой степени относительно k_1 / k или k_2 / k . Следовательно, существует в общем случае шесть решений для ω / kc при заданном значении β (достаточно ограничиться рассмотрением лишь положительных значений β). Каждому решению ω / kc отвечает две волны с k_1 / k и k_2 / k , отличающихся знаком k_1 / k и k_2 / k (см. (4)). Перечислим все эти шесть решений (двенадцать волн).

Решение I (волны I и I') *

$$k = 0, \quad k_1 = k_2 = \pm \omega / c. \quad (8)$$

Решение — действительное (имеет действительные значения ω , k_1 , k_2) при любых β и не зависит от β . Волна I нормально падает на поверхность тангенциального разрыва из неподвижной среды 1 и без отражения и преломления (относительно вектора \mathbf{k}) проходит в движущуюся среду 2. В движущейся среде групповая скорость волны не совпадает с фазовой, направленной по волновому вектору \mathbf{k} . Групповая скорость определяется лучевым вектором \mathbf{s} , компоненты которого в среде 2, согласно уравнению (4), будут

$$\frac{s_x}{c} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k} = \beta + \frac{1}{\omega / kc - \beta}, \quad \frac{s_z}{c} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial k_2} = \frac{k_2 / k}{\omega / kc - \beta}. \quad (9)$$

Для решения I $s_z / s_x = \pm 1 / \beta$, а знак s_z совпадает со знаком k_2 , поскольку $\omega / kc - \beta > 0$. Волна I' нормально падает (вектор \mathbf{k}) из среды 2 и без отражения и преломления проходит в среду 1.

Решение I (8) является в некотором смысле вырожденным: частота ω и волновые числа k_1 , k_2 не зависят от β и могут принимать произвольные значения. Это имеет место только для одинаковых сред 1, 2 и возникает из-за того, что с одной стороны решение I отвечает волнам, нормально падающим на поверхность тангенциального разрыва, а с другой стороны —

* Нумерация принята та же, что и в работах [3, 4].

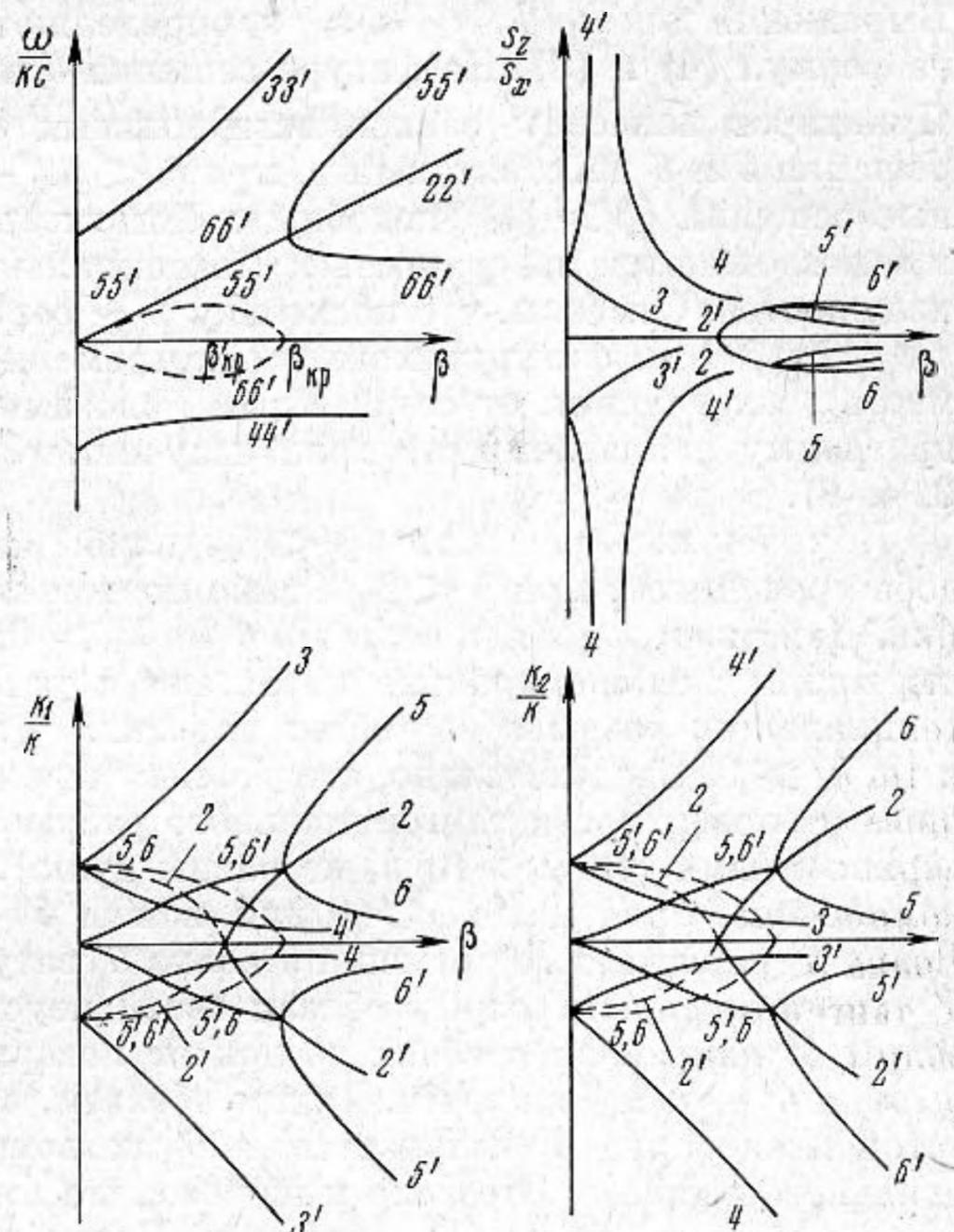
нормально падающие волны не отражаются от поверхности тангенциального разрыва при любых β [3]. Для различных сред 1 и 2 такого совпадения не будет [3] и решение 1 не вырождено.

Решение 2 (волны 2 и 2'):

$$\omega / kc = \beta / 2, \quad k_1 / k = k_2 / k = \pm \sqrt{(\beta/2)^2 - 1},$$

$$s_z / s_x = \mp \sqrt{(\beta/2)^2 - 1} (\beta^2 / 2 - 1)^{-1}. \quad (10)$$

Решение при $\beta > \beta_{кр}' = 2$ действительно. На фигуре оно представлено графически. Волна 2 падает из среды 1 на поверхность тангенциального разрыва (при этом $k > 0$). Направление вектора \mathbf{k} в среде 2 для этой волны совпадает с направлением \mathbf{k} в среде 1 (как и для волны 1). Однако компонента лучевого вектора s_z в среде 2 имеет отрицательный знак (обратный знаку k_2), так как $\omega / kc - \beta < 0$. Следовательно, и в среде 2 волна 2 не уходит от поверхности тангенциального разрыва, а падает на него (при этом $s_x > 0$). Поскольку в обеих средах 1 и 2 поток энергии волны 2 направлен к поверхности, то тангенциальный разрыв поглощает эту волну. Поток энергии волны 2' в обеих средах направлен от поверхности, следовательно, волна 2' излучается тангенциальным разрывом. Усиление звуковых волн при отражении от поверхности тангенциального разрыва и обращение коэффициента отражения в бесконечность (волна 2' при $\beta > \beta_{кр}'$, а также волны 5' и 6' при $\beta > \beta_{кр}$ — см. ниже) впервые получил Рибнер [5]. Однако позднее в литературе этот вопрос не обсуждался. В работах [3] и [4], также как и в ряде других работ, направление групповой скорости или лучевого вектора не рассматривалось. Поэтому волны 2, 2' при $\beta > \beta_{кр}'$ (а также 5, 5' и 6, 6' при $\beta > \beta_{кр}$) ошибочно [3, 4] считались волнами, проходящими без отражения через поверхность тангенциального разрыва из одной среды в другую.



Рассмотрим теперь решение 2 при $\beta < \beta_{кр}'$. Значения ω действительные, а k_1 и k_2 — чисто мнимые, причем $k_1 = k_2$, т. е. знаки их совпадают. Это значит, что либо в среде 1 (волна 2), либо в среде 2 (волна 2') решение неограниченно нарастает с удалением от поверхности тангенциального разрыва. Следовательно, решение 2 при $\beta < \beta_{кр}'$ нефизично и должно быть отброшено.

Решения 3 и 4 (волны 3, 3' и 4, 4'):

$$2\omega / kc = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 + 4\sqrt{\beta^2 + 1}}. \quad (11)$$

Выражения для k_1 / k , k_2 / k и s_z / s_x мы не приводим, поскольку они гро-

моздки и без труда получаются из формул (4) и (9) с помощью формулы (11). На фигуре решения 3 и 4 представлены графически. Решения 3, 4 действительные при любых β . Волны 3 и 4 падают из среды 1 (волна 3 $k > 0$, волна 4 $k < 0$) и без отражения проходят в среду 2. Аналогично, волны 3' и 4' проходят из среды 2 в среду 1. Отметим, что для решения 3 $\omega > 0$ и $\omega / kc - \beta > 0$, а для решения 4 $\omega < 0$ и $\omega / kc - \beta < 0$. В обоих случаях знаки групповой и фазовой скорости совпадают.

Решения 5 и 6 (волны 5, 5' и 6, 6'):

$$2\omega / kc = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4 - 4\sqrt{\beta^2 + 1}}. \quad (12)$$

Выражения для k_1 / k , k_2 / k , s_z / s_x определяются с помощью формулы (12) из формул (4) и (9). На фигуре решения 5 и 6 представлены графически. Пунктиром нанесены зависимости мнимых величин. При $\beta > \beta_{кр} = 2\sqrt{2}$ решения 5 и 6 действительные, при $\beta < \beta_{кр}$ — комплексные. Действительные решения ($\beta > \beta_{кр}$) подобны действительным решениям 2. Волны 5 и 6 поглощаются поверхностью тангенциального разрыва, а волны 5' и 6' излучаются. Отметим, что поскольку $\beta \sim \cos \theta$ (1), то зависимость k_1 / k и s_z / s_x от β (см. фигуру) можно одновременно рассматривать как зависимость этих величин от $\cos \theta$. Иными словами фигура изображает также диаграмму направленности волн излучения 2', 5', 6' (и волн поглощения 2, 5, 6).

Комплексные решения ($\beta < \beta_{кр}$) либо являются нефизическими, подобно решению 2 при $\beta < \beta_{кр}'$, либо представляют неустойчивые возмущения. Действительно, для волн 5 и 6 $\text{Im } k_1 > 0$, а $\text{Im } k_2 < 0$. Следовательно, эти волны экспоненциально нарастают с удалением от поверхности тангенциального разрыва в обеих средах. Для волн 5' и 6' $\text{Im } k_1 < 0$, а $\text{Im } k_2 > 0$. Следовательно, эти волны экспоненциально убывают с удалением от поверхности тангенциального разрыва и являются обобщенно-поверхностными ($\text{Re } k_1$ и $\text{Re } k_2$ не равны нулю). Частота ω этих волн также комплексна, причем $\text{Im } \omega > 0$ для волны 5' и $\text{Im } \omega < 0$ для волны 6'. Волна 5' нарастает во времени, а волна 6' затухает. Существованию волны 5' тангенциальный разрыв обязан своей неустойчивостью. Поток энергии волны 5' направлен в обеих средах от поверхности тангенциального разрыва, а 6' — к поверхности. Таким образом, обобщенно-поверхностная неустойчивая волна 5' излучается, а 6' поглощается поверхностью тангенциального разрыва. Это ясно и из того, что амплитуда волны 5' нарастает со временем, а волны 6' — затухает. Поток энергии, например, волны 5' от поверхности тангенциального разрыва как раз и обеспечивает рост амплитуды волны на любом расстоянии z от поверхности $z = 0$.

Интересно сопоставить действительные решения 1 — 6 с решениями задачи об отражении плоских монохроматических волн от поверхности тангенциального разрыва [4—6]. При $\beta > \beta_{кр}' = 2$ существует два разных сектора углов падения волн, разделенных сектором углов полного внутреннего отражения [7]. Предельные углы полного внутреннего отражения определяются равенством $\sin \varphi_{r1, r2} = 1 / (\beta \pm 1)$. Угол φ_{r2} появляется лишь при $\beta > \beta_{кр}'$. Сектор углов падения $-\pi/2 < \varphi < \varphi_{r1}$ является обычным (коэффициент отражения меньше 1). Для трех углов из этого сектора коэффициент отражения обращается в нуль, т. е. падающие под такими углами волны без отражения проходят через поверхность тангенциального разрыва. Соответственные решения 1 — 6 — это волны 1, 3, 4 при падении из среды 1 и волны 1', 3', 4' при падении из среды 2. Сектор углов падения $\varphi_{r2} < \varphi < \pi/2$ необычный. Коэффициент отражения больше 1, т. е. при отражении волн происходит их усиление. Для трех углов из этого сектора коэффициент отражения обращается в бесконечность (один угол появляется при $\beta > \beta_{кр}'$ и еще два угла при $\beta > \beta_{кр}$). Соответствующие этим углам решения 1 — 6 — это волны излучения 2', 5', 6', а также (в обращенной задаче об отражении) волны поглощения 2, 5, 6.

Таким образом, существует три разных по характеру типа решений (2) для одиночного тангенциального разрыва в сжимаемой среде. Это — плоские монохроматические волны, которые проходят под определенными углами через поверхность тангенциального разрыва без отражения. Затем, это — плоские монохроматические волны, которые под определенными углами излучаются или поглощаются поверхностью тангенциального разрыва. Наконец, это обобщенно-поверхностные неустойчивые волны, излучаемые или поглощаемые тангенциальным разрывом. Последние два типа волн существуют не во всем интервале значений β и непрерывно переходят друг в друга при критическом значении $\beta = \beta_{кр}$.

Авторы приносят благодарность К. А. Наугольных за советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, 44, 4, 151—153.
2. С. И. Сыроватский. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. Ж. эксп. и теор. физ., 1954, 27, 1, 121—123.
3. Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников. О неустойчивости плоского тангенциального разрыва. Ж. прикл. мат. и мех., 1969, 33, 3, 580—581.
4. Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников. Отражение звуковых волн от движущегося плоскопараллельного слоя. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 543—546.
5. H. S. Ribner. Reflection, transmission and amplification of sound by a moving medium. J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, 4, 435—441.
6. C. Yeh. A further note on the reflection and transmission of sound waves by a moving fluid layer. J. Acoust. Soc. America, 1968, 43, 6, 1454—1455.
7. P. A. Frankan, U. Ingard. Sound propagation into a moving medium. J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, 1, 126—127.

Институт кристаллографии АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
21 июля 1970 г.