АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 4

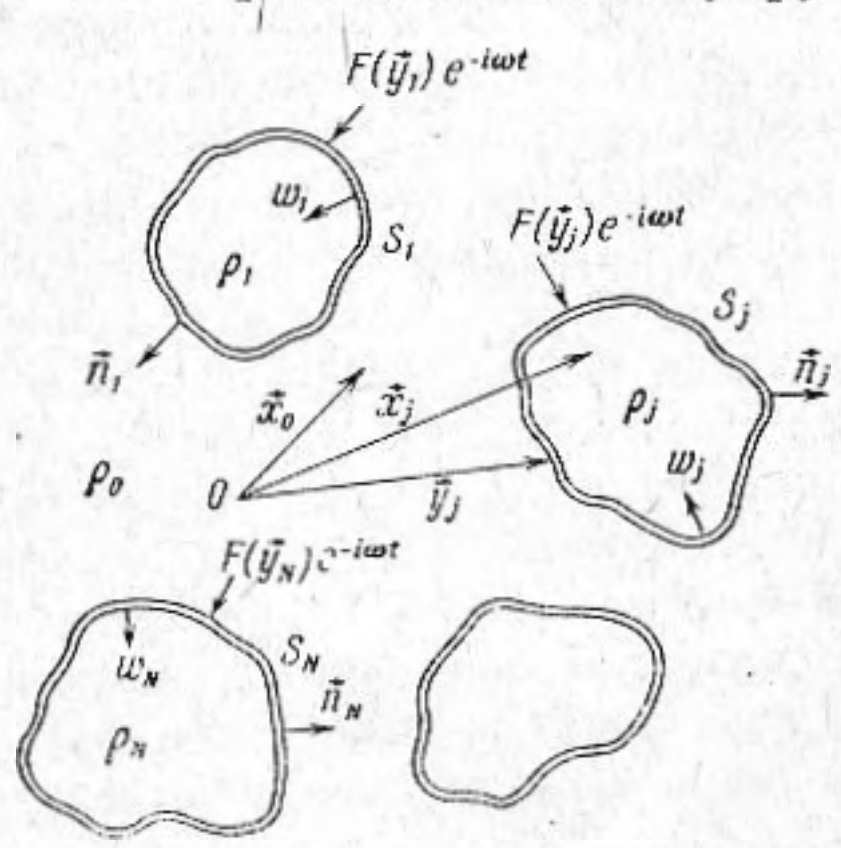
УДК 534.231

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ

В. И. Клячкин, Г. И. Усоскин

Рассматривается задача о колебаниях и излучении звука произвольными оболочками, образующими, вследствие взаимодействия через среду, связанную систему. Система интегро-дифференциальных уравнений, к которой сводится задача, решается в общем виде с помощью совокупности вспомогательных функций Грина колебаний оболочек. Выражение для поля излучения взаимодействующих оболочек представлено в виде квадратур, куда входят функции Грина уравнения Гельмгольца и уравнений колебаний оболочек. Общие выражения конкретизируются для случая одной и двух оболочек.

Задачу определения поля изучения произвольной упругой оболочки, на которую воздействуют внешние силы, с учетом реакции среды можно свести к интегро-дифференциальному уравнению, описывающему ее динамическое состояние. В некоторых практически важных случаях возникает необходимость определения звукового поля, излучаемого несколькими произвольно расположенными упругими оболочками, на которые воздействуют внешние силы, с учетом их взаимодействия через среду. Такая задача может быть сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений, порядок которой равен числу рассматриваемых оболочек. Решение такой системы представляет значительные трудности, в связи с чем в литературе задача о связанных колебаниях упругих оболочек рассматривалась только в простейшей постановке, в частности для двух параллельно расположенных пластин [1, 2]. Ниже строится в замкнутом виде решение задачи о связанных колебаниях и излучении звука системой произвольных оболочек. При этом в общем виде разрешается система интегро-дифференциальных уравнений.



Рассмотрим N упругих гладких оболочек, произвольно расположенных в пространстве (см. фигуру). Акустические параметры сред внутри оболочек различаются между собой и отличаются от параметров среды, заполняющей внешнее пространство. Пусть на каждую оболочку действует распределенная гармоническая сила $F(\mathbf{y}_j)\cdot e^{-i\omega t}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, где $\mathbf{y}_j$ — координаты поверхности j-й оболочки. Для определения давления в поле излучения оболочек нужно воспользоваться граничными условиями на их поверхностях.

Мы ограничимся рассмотрением только тонких оболочек, совершающих изгибные колебания. При этом нормальные составляющие скоростей обеих

поверхностей оболочек совпадают со скоростью их срединных поверхностей и равны нормальным составляющим колебательных скоростей прилегающих точек среды. Используя одночленную формулу Грина, с учетом таких граничных условий, выражение для давления во внешнем пространстве можно написать в виде

$$p(\mathbf{x}_0) = \rho_0\omega^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} w(\mathbf{y}_j) \cdot G_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j)\, d\mathbf{y}_j, \tag{1}$$

а в областях, ограниченных оболочками, в виде

$$p(\mathbf{x}_j) = -\rho_j\omega^2 \int_{S_j} w(\mathbf{y}_j) G_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j)\, d\mathbf{y}_j, \quad (j = 1, 2, \ldots N). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_j$ — координаты точек внешнего пространства и объема, ограниченного j-й оболочкой, $G_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j)$ и $G_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j)$ — функции Грина уравнения Гельмгольца для этих же областей при однородных условиях Неймана на поверхностях всех оболочек, ρ_0 и ρ_j — плотности сред, заполняющих внешнее пространство и пространство, ограниченное j-й оболочкой, S_j — поверхность этой оболочки. Положительные направления нормалей к срединным поверхностям оболочек, их смещений и внешних сил показаны на фигуре. Временной множитель здесь и ниже опускается. Смещения оболочек $w(\mathbf{y}_j)$ являются решением системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$L^{(j)}w(\mathbf{y}_j) = F(\mathbf{y}_j) + \omega^2 \int_{S_j} w(\mathbf{y}_j')\,[\rho_0 G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') + \rho_j G_j(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')]\, d\mathbf{y}_j' +$$

$$+ \rho_0\omega^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} \int_{S_l} w(\mathbf{y}_l) G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_l)\, d\mathbf{y}_l, \quad (j = 1, 2, \ldots N), \tag{3}$$

где $L^{(j)}$ — дифференциальный оператор разрешающего уравнения антисимметричных колебаний j-й оболочки. Он предполагается самосопряженным [3]. Если решения $w(\mathbf{y}_j)$ этой системы известны, то окончательное решение исходной задачи представляется в виде квадратур (1) и (2). Разрешим эту систему в общем виде.

Для каждой из оболочек рассмотрим функцию Грина $W_{jj}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ ее колебаний с учетом реакции среды и взаимодействия с другими оболочками, определив ее уравнением

$$L^{(j)}W_{jj}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') = \delta(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j') + \omega^2 \int_{S_j} W_{jj}(\mathbf{y}_j''|\mathbf{y}_j')\,[\rho_0 G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'') +$$

$$+ \rho_j G_j(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'')]\, d\mathbf{y}_j'' + \rho_0\omega^2 \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} \int_{S_l} W_{lj}(\mathbf{y}_l|\mathbf{y}_j'') G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_l)\, d\mathbf{y}_l, \tag{4}$$

где $\delta(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j')$ — двумерная дельта-функция. Таким образом $W_{jj}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ определяет поле смещений j-й оболочки при воздействии на нее в точке $\mathbf{y}_j'$ единичной точечной силы. Входящие в уравнение функции $W_{lj}(\mathbf{y}_l|\mathbf{y}_j')$ отражают связь колебаний оболочек через среду и определяют при тех же условиях смещение j-й оболочки. В дальнейшем мы будем называть их функциями связи. Выразим смещение произвольной j-й оболочки, на которую действует распределенная сила, через ее функцию Грина. Для этого умножим соответственное уравнение системы (3) на $W_{jj}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$, а уравнение (4) на $w(\mathbf{y}_j)$, вычтем из первого результата второй и проинтегрируем

по поверхности j-й оболочки. Применяя теорему Грина, получим *

$$w(\mathbf{y}_j') = \int\limits_{S_j} F(\mathbf{y}_j) W_{jj}(\mathbf{y}_j' | \mathbf{y}_j) d\mathbf{y}_j +$$

$$+ \rho_0 \omega^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} \int\limits_{S_l} \int\limits_{S_j} G_0(\mathbf{y}_j | \mathbf{y}_l) P_{jl}(\mathbf{y}_j; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') d\mathbf{y}_l d\mathbf{y}_j, \tag{5}$$

где

$$P_{jl}(\mathbf{y}_j; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') = P_{kl}(\mathbf{y}_k; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') |_{k=j},$$

$$P_{kl}(\mathbf{y}_k; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') = \begin{vmatrix} w(\mathbf{y}_l); & w(\mathbf{y}_k) \\ W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j'); & W_{kj}(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_j') \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь первое слагаемое определяет поле смещений j-й оболочки под действием приложенных к ней внешних сил с учетом реакции среды и наличия других оболочек, а второе учитывает вклад в ее колебания сил, воздействующих на остальные оболочки. Это слагаемое можно выразить непосредственно через эти силы. Для этого умножим уравнение, которому удовлетворяет функция $W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j')$:

$$L^{(l)} W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j') = \omega^2 \int\limits_{S_l} W_{lj}(\mathbf{y}_l' | \mathbf{y}_j') [\rho_0 G_0(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_l') + \rho_l G_l(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_l')] d\mathbf{y}_l' +$$

$$+ \rho_0 \omega^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{N} \int\limits_{S_k} W_{kj}(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_j') G_0 = (\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k; \quad (l = 1, \ldots j-1, j+1, \ldots N) \tag{7}$$

на $w(\mathbf{y}_l)$, а выражение (4) при $j = l$ на $W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j')$. Вычтя первый результат из второго, проинтегрировав по поверхности j-й оболочки и применив теорему Грина, получим

$$\rho_0 \omega^2 \int\limits_{S_l} \int\limits_{S_j} G_0(\mathbf{y}_j | \mathbf{y}_l) P_{jl}(\mathbf{y}_j; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') d\mathbf{y}_l d\mathbf{y}_j = \int\limits_{S_l} F(\mathbf{y}_l) W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j) d\mathbf{y}_l -$$

$$- \rho_0 \omega^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, l}}^{N} \int\limits_{S_l} \int\limits_{S_k} G_0(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_k) P_{kl}(\mathbf{y}_k; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') d\mathbf{y}_k d\mathbf{y}_l. \tag{8}$$

Просуммировав эти равенства по всем $l \neq j$, в левой части получим второе слагаемое выражения (5). Последнее слагаемое правой части обратится в нуль. Это следует из определения (6), согласно которому при $k \neq l$ справедливо соотношение $P_{kl}(\mathbf{y}_k; \mathbf{y}_l; \mathbf{y}_j') = -P_{lk}(\mathbf{y}_l; \mathbf{y}_k; \mathbf{y}_j')$, а также из симметричности функции Грина уравнения Гельмгольца относительно точек источника и наблюдения. Подставляя просуммированное по всем $l \neq j$ выражение (8) в (5), получим формулу для смещения j-й оболочки, в которую в явном виде входят внешние силы действующие на все оболочки:

$$w(\mathbf{y}_j') = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{S_l} F(\mathbf{y}_l) W_{lj}(\mathbf{y}_l | \mathbf{y}_j') d\mathbf{y}_l. \tag{9}$$

По структуре каждое слагаемое суммы представляет одночленную форму-

* Если оператор $L^{(j)}$ не самосопряженный, то уравнение (4) должно определяться для сопряженной краевой задачи, а при получении выражения (5) и далее использоваться обобщенная теорема Грина [4].

лу Грина, определяющую решение неоднородной граничной задачи через соответственные функции Грина.

Для определения функций связи $W_{lj}(\mathbf{y}_l|\mathbf{y}_j')$ рассмотрим иную систему оболочек, отличающуюся от исходной тем, что в ней некоторые оболочки «заторможены», т. е. заменены жесткими экранами, форма которых совпадает с формой их срединных поверхностей при отсутствии колебаний На поверхностях «заторможенных» оболочек для поля давления во внешнем пространстве реализуются однородные граничные условия Неймана. Припишем каждой оболочке исходной системы порядковый номер и положим для определенности, что m оболочек $(m < N)$ с номерами $i_1 \ldots i_m$ «заторможены». Совокупность этих номеров образует множество $R_m = \{i_1, \ldots, i_m\}$, характеризующее рассматриваемую промежуточную систему. Очевидно, для исходной системы множество R_0 является пустым. Для системы, характеризуемой множеством R_m, функции Грина оставшихся («незаторможенных») оболочек $W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ и функции связи $W_{jl}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j)$ определяются уравнениями, аналогичными (4) и (7). Объединяя их в одно, получим

$$L^{(j)}W_{jl}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_l') = \delta_{jl}\delta(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j') + \omega^2 \int\limits_{S_j} W_{jl}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j''|\mathbf{y}_l')\,[\rho_0 G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'') +$$

$$+ \rho_j G_j(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'')]\,d\mathbf{y}_j'' + \rho_0\omega^2 \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j;\, k\overline{\in} R_m}}^{N} \int\limits_{S_k} W_{kl}^{(R_m)}(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_l')\,G_0(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_k)\,d\mathbf{y}_k, \quad (10)$$

$$(j;\, l \overline{\in} R_m)$$

где δ_{jl} — символ Кронекера. При $l = j$ уравнение определяет функцию Грина j-й оболочки, а при $l \neq j$ — функцию связи всех «незаторможенных» оболочек с l-й оболочкой, на которую действует точечная сила. Для дальнейшего функцию связи необходимо выразить через функции Грина этих оболочек, входящих, однако, не в рассматриваемую, а некоторую новую систему взаимодействующих оболочек, отличающуюся от рассматриваемой тем, что в ней дополнительно «заторможена» l-я оболочка, на которую действовала сила. Характеризующее эту систему множество имеет вид $R_{m+1} = \{R_m;\, l\}$. Уравнения, которым удовлетворяют новые функции Грина, получаются из (10) при $l = j\,(l \in R_m)$ и замене R_m на R_{m+1}. Умножим одно из таких уравнений при фиксированном j на $W_{jl}^{(R_m)}{}_l(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_l')$, а уравнение (10) $W_{jl}^{R(m+1)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$. Вычтем одно из другого и проинтегрируем по поверхности j-й оболочки. После применения теоремы Грина и некоторых преобразований получим

$$W_{jl}^{(R_m)}(y_j|y_l') = \rho_0\omega^2 \int\limits_{S_l}\int\limits_{S_j} W_{ll}^{(R_m)}(y_l|y_l')\,W_{jj}^{(R_{m+1})}(y_j|y_j') \times$$

$$\times G_0(y_j|y_l)\,dy_j\,dy_l + \rho_0\omega^2 \sum_{\substack{k=1\\ k\overline{\in} R_{m+2}}}^{N} \int\limits_{S_l}\int\limits_{S_k} W_{ll}^{(R_m)}(y_l|y_l') \times$$

$$\times W_{kj}^{(R_{m+1})}(y_k|y_j')\cdot G_0(y_k|y_l)\,dy_l\,dy_k, \quad (11)$$

где $R_{m+2} = \{R_{m+1};\, j\}$. Таким образом, функцию связи $W_{jl}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j'|\mathbf{y}_l')$ удалось выразить через функцию Грина возбуждаемой оболочки, на которой рассматриваются наведенные колебания, но входящей в новую систему, где «заторможено» на одну оболочку больше, и через функцию связи оболочек, входящих в новую систему. В свою очередь, из соотношения (11) следует, что эти функции связи можно выразить через функции Грина и функции связи оболочек системы, в которой «заторможено» на две оболоч-

ки больше. Такое последовательное переопределение можно продолжать до тех пор, пока в системе останутся «незаторможенными» только возбуждаемая оболочка и оболочка, поле смещения которой рассматривается. Подставляя в выражение (11) последовательно выражения для функций связи оболочек, входящих в системы все с бóльшим количеством «заторможенных» оболочек, получим

$$W_{jl}^{(R_m)}(y_j' \mid y_l') = \rho_0\omega^2 \int\limits_{S_l}\int\limits_{S_j} W_{ll}^{(R_m)}(y_l \mid y_l')\, W_{jj}^{(R_{m+1})}(y_j \mid y_j')\, M^{(R_m)}(y_j \mid y_l)\, dy_j\, dy_l, \tag{12}$$

где

$$M^{(R_m)}(y_j \mid y_l) = \sum_{r=0}^{N-m-2} A_r(y_j \mid y_l), \tag{13}$$

$$A_r(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{y}_l) =$$

$$= \begin{cases} G_0(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{y}_l), & \text{при } r = 0, \\ (\rho_0\omega^2)^r \prod\limits_{p=1}^{r} \sum\limits_{\substack{n(p)=1 \\ n_{(p)} \in R_{m+p+1}}}^{N} \int\limits_{S_{n(p)}}\int\limits_{S_{n(p)}} W_{n(p)n(p)}^{(R_{p+m+1})}(\mathbf{y}_{n(p)} \mid \mathbf{y}_{n(p)}')\, G_0(\mathbf{y}_{n(p)} \mid \mathbf{y}_{n(p-1)}) B_p\, d\mathbf{y}_{n(p)}\, d\mathbf{y}_{n(p)}'; & \\ & \text{при } r = 0. \end{cases}$$

При этом предполагается, что $\mathbf{y}_{n(0)} \equiv \mathbf{y}_l$; $R_{p+m+1} = \{R_{m+2};\ n(1) \ldots \ldots n(p-1)\}$,

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{при } p \neq r \\ G_0(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{y}_{n(r)}), & \text{при } p = r. \end{cases}$$

В отличие от выражения (11), полученная формула выражает функцию связи l-й и j-й оболочек, входящих в систему с m «заторможенными» оболочками, только через их функции Грина и функции Грина всех остальных оболочек, входящих в систему при различном числе «заторможенных» оболочек. Подставляя выражение (12) в формулу (9), мы получим окончательное выражение для поля смещения j-й оболочки, когда внешние силы воздействуют на все оболочки, входящие в систему:

$$w(\mathbf{y}_j') = \int\limits_{S_j} \left[F(\mathbf{y}_j) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} F_l(\mathbf{y}_j) \right] W_{jj}(\mathbf{y}_j' \mid \mathbf{y}_j)\, d\mathbf{y}_j. \tag{14}$$

Это выражение имеет обычную интегральную форму представления поля смещений с помощью соответственной функции Грина. Особенности задачи сказываются лишь в том, что помимо внешних сил $F(\mathbf{y}_j)$, непосредственно приложенных к рассматриваемой оболочке, на нее действуют, вследствие связи ее колебаний с колебаниями остальных оболочек, дополнительные эквивалентные силы $F_l(\mathbf{y}_j)$, обязанные своим происхождением силам, приложенным к другим оболочкам системы. Величина этих сил определяется по формуле:

$$F_l(\mathbf{y}_j) = \rho_0\omega^2 \int\limits_{S_l}\int\limits_{S_l} F(\mathbf{y}_l)\, W_{ll}^{(R_1)}(\mathbf{y}_l' \mid \mathbf{y}_l)\, M^{(R_0)}(\mathbf{y}_j \mid \mathbf{y}_l')\, d\mathbf{y}_l\, d\mathbf{y}_l', \tag{15}$$

где $R_1 = \{j\}$, а R_0 — пустое множество. С учетом выражения (14) давление во внешнем пространстве и внутри любой из оболочек, определяемое формулами (1) и (2), можно выразить непосредственно через внешние

силы, действующие на систему оболочек:

$$p(\mathbf{x}_0) = \rho_0\omega^2 \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \Big[F(\mathbf{y}_j) + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} F_l(\mathbf{y}_j) \Big] I_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j)\, d\mathbf{y}_j, \tag{16}$$

$$p(\mathbf{x}_j) = -\rho_j\omega^2 \int_{S_j} \Big[F(\mathbf{y}_j) + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N} F_l(\mathbf{y}_j) \Big] J_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j)\, d\mathbf{y}_j, \quad (j = 1,2\ldots N). \tag{17}$$

Функции $I_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j)$ и $I_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j)$ определяются интегральными соотношениями вида

$$\begin{matrix} I_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j) \\ I_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j) \end{matrix} = \int_{S_j} W_{jj}(\mathbf{y}_j'|\mathbf{y}_j) \begin{matrix} G_0(\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_j') \\ G_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_j') \end{matrix} d\mathbf{y}_j' \tag{18}$$

и описывают поле давления в точках $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_j$ при воздействии на j-ю оболочку в точке $\mathbf{y}_j$ единичной силы. Поэтому эти функции могут быть названы переходными.

Выражения (16) и (17) совместно с определениями (15) и (18) представляют формальное решение задачи. Для практического их использования необходимо определить входящие в формулы (15) и (18) функции Грина изгибных колебаний оболочек при условии, что в системе часть оболочек «заторможена». Такие функции определяются уравнением (10) при $l = j$. Искомую функцию Грина j-й оболочки $W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ можно выразить через функцию Грина той же оболочки, но входящей в систему, где «заторможена» еще одна с номером $i \overline{\in} R_m$, и характеризуемую, таким образом, множеством $R_{m+1} = \{R_m; i\}$. Для этого уравнение (10) умножим на $W_{jj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$, а аналогичное уравнение, в котором R_m заменено на R_{m+1}, на $W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$. Вычтем из первого уравнения второе, проинтегрируем по поверхности j-й оболочки и применим теорему Грина. В результате после упрощения получим

$$W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') = W_{jj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') + \rho_0\omega^2 \int_{S_i} W_{ij}^{(R_m)}(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_j) \Big[\int_{S_j} W_{jj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_j''|\mathbf{y}_j') \times$$

$$\times G_0(\mathbf{y}_j''|\mathbf{y}_i)\, d\mathbf{y}_j'' + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j;\, k\overline{\in} R_{m+1}}}^{N} \int_{S_k} W_{kj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_j')\, G_0(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_i)\, d\mathbf{y}_k \Big] d\mathbf{y}_i. \tag{19}$$

Для определения входящих сюда функций связи $W_{ij}^{(R_m)}(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_j)$ и $W_{kj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_j')$ воспользуемся выражением (12). В результате получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно искомой функции Грина колебаний произвольной j-й оболочки, входящей в систему с m «заторможенными» оболочками:

$$W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') = W_{jj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j') + \rho_0^2\omega^4 \int_{S_j} W_{jj}^{(R_m)}(\mathbf{y}_j''|\mathbf{y}_j')\, D(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'')\, d\mathbf{y}_j'', \tag{20}$$

ядро которого имеет вид

$$D(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j'') = \int_{S_j} W_{jj}^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_j'|\mathbf{y}_j'') \Big[\int_{S_i}\int_{S_i} W_{ii}^{(\widetilde{R}_{m+1})}(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_i)\, M^{(R_m)}(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_j) \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=1\\ k\overline{\in} R_{m+1}}}^{N} C_k(\mathbf{y}_j'|\mathbf{y}_i)\, d\mathbf{y}_i\, d\mathbf{y}_i' \Big] d\mathbf{y}_j'. \tag{21}$$

Функция $M^{(R_m)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j)$ определяется формулой (13), а коэффициенты C_k выражениями:

$$C_k = \begin{cases} G_0(\mathbf{y}_j'|\mathbf{y}_i), & k = j \\ \rho_0\omega^2 \int\limits_{S_k}\int\limits_{S_k} W_{kk}^{(R_{m+2})}(\mathbf{y}_k'|\mathbf{y}_k) M^{(R_{m+1})}(\mathbf{y}_k'|\mathbf{y}_j')\cdot G_0(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_i)\, d\mathbf{y}_k\, d\mathbf{y}_k'; & k \neq j. \end{cases}$$

При этом $R_{m+1} = \{R_m;\ i\}$ и $R_{m+2} = \{R_{m+1};\ j\}$. Выражение для ядра интегрального уравнения содержит функции Грина всех оболочек, номера которых принадлежат множеству R_m, при условии, что они последовательно входят в различные системы, характеризуемые множествами R_{N-2}; R_{N-3}; ... ..., ; R_{m+1}. Однако каждая из этих функций также удовлетворяет интегральному уравнению вида (20). Таким образом, для разрешения интегрального уравнения, определяющего функцию $W_{jj}^{Rm}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$, предварительно необходимо разрешить последовательность аналогичных интегральных уравнений относительно функции $W_{ii}^{(R_{N-2})}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ при $i \in R_{N-2}$, $W^{(R_{N-3})}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ при $i \bar{\in} R_{N-3}$, ... $W_{ii}^{(Rm+1)}(\mathbf{y}_j|\mathbf{y}_j')$ при $i \bar{\in} R_{m+1}$. При этом решения всех предыдущих уравнений входят в ядро и образуют свободный член последующего. В результате получается некоторая рекуррентная последовательность интегральных уравнений, «сцепляющихся» по структуре ядер и свободных членов. Поскольку в этой цепочке от решений, параметром которых является какое-то множество, необходимо переходить к решениям, параметром которых является другое множество, содержащее меньшее число элементов, то полученная форма построения решения является замкнутой. Заметим, что аналогичные последовательности «зацепляющихся» уравнений возникают в некоторых задачах статистической механики и гидродинамики [5].

Легко показать, что общее число различных функций Грина изгибных колебаний оболочек, через которые может быть выражено решение рассматриваемой задачи, равно $N\cdot 2^{N-1}$. Считая функцию Грина любой оболочки, когда все остальные «заторможены» и задачи о взаимодействии не возникает, известной, получим, что для решения задачи о связанных колебаниях системы в общем случае необходимо разрешить $N\cdot(2^{N-1}-1)$ интегральных уравнений. Исходными при этом являются функции Грина колебаний всех оболочек с учетом реакции среды и функция Грина уравнения Гельмгольца внешней области. Однако при рациональном построении решения (многократном использовании уже определенной промежуточной функции) можно ограничиться решением меньшего числа уравнений. В частности, при $N = 3$ достаточно решить 7 уравнений, вместо 9, а при $N = 4$ необходимое количество уравнений равно 18 вместо 28. Кроме того, если некоторые оболочки одинаковы или имеется симметрия в их взаимном расположении, некоторые функции Грина оказываются одинаковыми и общее число уравнений, которые необходимо разрешить, сокращается.

Рассмотрим простейшие частные случаи, когда система состоит из одной или двух оболочек. Для одиночной оболочки в формулах (16) и (17) суммы по l отсутствуют и в (16) от суммы по j остается один член. Функция $W(\mathbf{y}'|\mathbf{y})$, входящая в выражение (18), считается известной, поскольку непосредственно является функцией Грина колебаний оболочки с учетом реакции среды. Если она неизвестна, то используя теорему Грина, ее можно связать с функцией Грина колебаний оболочки в вакууме. При этом получим интегральное уравнение Фредгольма относительно искомой функции:

$$W(\mathbf{y}'|\mathbf{y}) = V(\mathbf{y}'|\mathbf{y}) + \rho_0\omega^2 \int\limits_S W(\mathbf{y}'|\mathbf{y}'')D(\mathbf{y}''|\mathbf{y})\, d\mathbf{y}'', \qquad (22)$$

где $D(\mathbf{y}''|\mathbf{y}) = \int\limits_s V(\mathbf{y}|\mathbf{y}')[G_0(\mathbf{y}''|\mathbf{y}') + G_1(\mathbf{y}''|\mathbf{y}')]d\mathbf{y}'$. Здесь $V(\mathbf{y}|\mathbf{y}')$ — функция Грина колебаний оболочки в вакууме, $G_0(\mathbf{y}''|\mathbf{y}')$ и $G_1(\mathbf{y}''|\mathbf{y}')$ — функции Грина уравнения Гельмгольца для внешней и внутренней среды. Для случая двух оболочек необходимо разрешить два интегральных уравнения, если оболочки разные, и одно — если они одинаковые. В первом случае имеем

$$W_i(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_i) = W_i^{(j)}(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_i) + \rho_0^2\omega^4 \int\limits_{S_i} W_i(\mathbf{y}_i''|\mathbf{y}_i)\, D_i(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_i'')\, d\mathbf{y}_i''; \quad i = 1, 2,$$

где $D_i(\mathbf{y}_i'|\mathbf{y}_i'') = \int\limits_{S_i}\int\limits_{S_i}\int\limits_{S_j} W_i^{(j)}(\mathbf{y}_i'|\mathbf{x}_i)\, W_j^{(i)}(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_j)\, G_0(\mathbf{x}_j|\mathbf{y}_i'')\, G_0(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}_i) d\mathbf{x}_i\, d\mathbf{x}_j\, d\mathbf{y}_i$,

$$j = \begin{cases} 2, \text{ при } i = 1 \\ 1, \text{ при } i = 2, \end{cases}$$ $G_0(\ldots|\ldots)$ — функция Грина внешней среды;

$W_1^{(2)}(\ldots|\ldots)$ и $W_2^{(1)}(\ldots|\ldots)$ — функции Грина оболочек с учетом среды, определяемые по формуле (22). Если оболочки одинаковые, то $W_1^{(2)}(\ldots|\ldots) = W_2^{(1)}(\ldots|\ldots)$ и $W_1(\ldots|\ldots) = W_2(\ldots|\ldots)$ с точностью до обозначения аргументов.

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть получены результаты с учетом симметричных (толщинных) колебаний оболочек. При этом необходимо только изменить вид дифференциального оператора, описывающего колебания, и граничных условий. Кроме того, разработанный метод позволяет построить решение задачи о связанных колебаниях систем с распределенными параметрами любого вида, если она сводится к системе интегродифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. H. White, A. Powell. Transmission of randon sound and vibration through a rectangular double wall. J. Acoust. Soc. America, 1966, **40**, 4, 821—832.
2. В. И. Клячкин, Б. Н. Платунова. Корреляционные характеристики поля давления в пространстве между двумя колеблющимися бесконечными пластинами. Тр. 1 Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», Новосибирск, 1968.
3. Л. М. Лямшев. К принципу взаимности в акустике. Докл. АН СССР, 1959, **125**, 6, 1231—1234.
4. Ф. Морз, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. М., ИЛ., 1958.
5. Н. Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л. 1949.

Ленинград

Поступила в редакцию
3 июня 1969 г.