АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 4

УДК 534.833.6

ВЛИЯНИЕ РАССЕЯНИЯ НА ШЕРОХОВАТОЙ СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОЙ ГРАНИЦЕ НА ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В. М. Кудряшов

Получена модификация формулы Л. М. Бреховских применительно к некоторому классу волноводов со статистически неровными границами. Найдены условия применимости выведенной формулы. Выяснено, что рассеяние может изменить как абсолютные уровни аномалии распространения, так и закон изменения ее с глубиной по сравнению с классическим случаем, когда рассеяние на границе не учитывается.

Рассмотрим усредненное по координатам «дальнее» звуковое поле в волноводе со статистически неровной границей. Для волновода с плоской границей эта задача решена Бреховских [1].

Считаем, что волновод неограничен по координатам x и y, а по вертикали локализован в области $H \geqslant z \geqslant h + s(x, y)$, где $s(x, y)$ — статистически однородная, распределенная по нормальному закону функция x и y, $\langle s(x, y)\rangle = 0$, $\langle s(x, y)s(x+\tau_x, y+\tau_y)\rangle = \sigma^2 N(\tau_x, \tau_y)$, $|k_z(h)\sigma|^2 \ll 1$ для всех волн, «захваченных» волноводом; $k_z(z)$ — проекция волнового вектора на ось z. Неровная граница — акустически мягкая. Показатель преломления среды $n(z)$ в волноводе зависит только от координаты z и может иметь единственный максимум при $z = h$, что соответствует так называемому приповерхностному волноводу. В этом случае волна распространяется на большие расстояния только путем многократных отражений от неровной границы. Нас интересует, как рассеяние на этой границе скажется на структуре «дальнего» поля.

Пусть звуковое поле $\Psi(x, y, z)\exp[-i\omega t]$ возбуждается точечным гармоническим источником, имеющим координаты $(0, 0, z_0)$; ω — круговая частота колебаний, t — время. Полагаем, что в случае $\sigma \equiv 0$ (плоская граница) звуковое поле полностью описывается суперпозицией нормальных волн, т. е.

$$\Psi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(r, z);$$

$$\Psi_m(r, z) = C_m H_0^{(1)}(u_m r)\, \Phi(z, u_m), \tag{1}$$

где

$$\Phi(h, u_m) = 0, \ \operatorname{Re} u_m \geqslant 0, \ \operatorname{Im} u_m \geqslant 0;$$

$$C_m = \frac{i2\pi\Phi(z_0, u_m)u_m}{\left[\dfrac{\partial}{\partial z}\Phi(z, u_m)\right]_{z=h}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\Phi(h, u)\right]_{u=u_m}}$$

если $\lim\limits_{R\to 0}\Psi(R) = \lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\exp(ik_0R)}{R}$.

$\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\mathbf{R} = \{x, y, z - z_0\}$. $\Phi(z, u)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(z, u) + [k_0^2 n^2(z) - u^2]\Phi(z, u) = 0,$$

удовлетворяющее граничному условию при $z = H$.

Усредняя поле по координате r, исключим интерференционную картину по горизонтали, что соответствует энергетическому суммированию нормальных волн. Сказанное справедливо, если интервал усреднения кратен средней длине цикла для «захваченных» волноводом волн. Локальное усреднение по координате z устраняет из рассмотрения тонкую (интерференционную) структуру поля по вертикали.

Воспользовавшись приближением ВКБ для $\Phi(z, u)$, произведя вышеуказанные усреднения по координатам, и заменяя суммирование интегрированием, получим следующую модификацию формулы Бреховских:

$$A(r, z) = re^{-\mu r}\frac{4n^2(h)}{n(z_0)n(z)}\int\limits_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}}\frac{\cos\chi\sin\chi}{\sin\chi(z_0)\sin\chi(z)R_{\text{ц}}(\chi)}d\chi, \tag{2}$$

справедливую при условии, что $2\operatorname{Im} u_m = \mu_m = \mu$ для всех практически формирующих поле нормальных волн. Здесь $A(r, z)$ — усредненная по координатам аномалия распространения звука, определяемая как отношение интенсивности звука в волноводе к гипотетической интенсивности, создаваемой тем же излучателем в однородном пространстве без потерь, $\chi(z)$ — угол скольжения волны на горизонте z, $\chi = \chi(h)$, $\chi_{\min}$ и $\chi_{\max}$ — минимальное и максимальное значение χ, $R_{\text{ц}}(\chi)$ — длина цикла волны.

Если $n^2(h) = 1 - 2bz$, $h = 0$, $H \to \infty$, то

$$A(r, z) \simeq re^{-\mu r}\frac{4}{R_{\text{ц}}(\chi_{\min})}K(\varphi), \tag{3}$$

где $\varphi = \sqrt{z/z_0}$ при $0 \leqslant z \leqslant z_0$; $\varphi = \sqrt{z_0/z}$ при $z \geqslant z_0$; $K(\varphi)$ — полный эллиптический интеграл.

При изменении z аномалия распространения имеет максимум, когда $z = z_0$. При наличии рассеяния на границе полное поле естественным образом разбивается на когеррентное (статистически среднее) и случайное поле [2]. В большинстве опубликованных работ полное поле описывают с помощью функции Грина для задачи с плоской гладкой границей. Более эффективным является решение, использующее функцию Грина когеррентного поля. Впервые такое представление поля было осуществлено в работе [3] в задаче о рассеянии на флюктуациях показателя преломления среды.

Применительно к задаче рассеяния на статистически шероховатой границе ($k^2\sigma^2 \ll 1$) выражение для полного поля, использующее функцию Грина когерентного поля в волноводе, имеет при ($N(\boldsymbol{\tau}) = N(\tau)$ вид

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r}, z) = \langle\Psi(\mathbf{r}, z)\rangle - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(z, \zeta)}{\Pi(\zeta)}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{s(\eta, \rho)\left[\frac{\partial}{\partial z}\Psi(\eta, \rho, z)\right]_{z=h} + \right.\\ + \frac{\sigma^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z, u)\right]_{z=h}}{\Pi(u)}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}N(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial z}\Psi(\eta - \tau_x, \rho - \tau_y, z)\right]_{z=h} \times\\ \left.\times H_0^{(1)}(u(\tau)d\tau_x d\tau_y u\,du\right\}H_0^{(1)}(\zeta|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)d\eta\,d\rho\,\zeta\,d\zeta,\end{aligned} \tag{4}$$

если вместо точного граничного условия $\Psi[x, y, h+s(x, y)]=0$ использовать приближенное

$$\Psi(x, y, h)+s(x, y)\left[\frac{\partial}{\partial z}\Psi(x, y, z)\right]_{z=h}=0.$$

В формуле (4) использованы обозначения:

$$\mathbf{r}_1=\{\eta, \rho\}, \boldsymbol{\tau}=\{\tau_x, \tau_y\}; \Pi(\zeta)=\Phi(h, \zeta)-i\alpha(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z, \zeta)\right]_{z=h},$$

где

$$\alpha(\zeta)=-i\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z, u)\right]_{z=h}}{\Pi(u)}G(\zeta, u)\,du.$$

Для статистически изотропной границы

$$G(\zeta, u)=\frac{u}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}N(\tau)\exp[-i\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\tau}]H_0^{(1)}(u\tau)\,d\tau_x d\tau_y=$$

$$=\frac{u}{2}\int\limits_0^{\infty}N(\tau)H_0^{(1)}(u\tau)J_0(\zeta\tau)\tau\,d\tau.$$

Граничное условие для среднего поля легко получается усреднением по ансамблю реализаций функции $s(x, y)$ обоих частей формулы (4). В результате получается известное [4, 5] эффективное граничное условие на плоскости $z=h$, в силу чего когерентное поле описывается формулой вида (1), в которой следует заменить u_m на ζ_m, являющимися корнями уравнения $\Pi(\zeta)=0$, и

$$C_m=\frac{i2\pi\zeta_m\Phi(z_0, \zeta_m)}{\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z, \zeta_m)\right]_{z=h}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\Pi(\zeta)\right]_{\zeta=\zeta_m}}$$

Уравнение (4) в общем виде не разрешается относительно $\Psi(x, y, z)$. Решать его можно, например, итерационным методом, используя в качестве нулевого приближения когерентное поле, т. е. полагая

$$\Psi(r, z)=\sum_{N=0}^{\infty}\Psi^{(N)}(r, z), \quad \text{где} \quad \Psi^{(0)}(r, z)=\langle\Psi(r, z)\rangle.$$

В результате получаются бесконечный ряд, в котором относительно простые выражения для членов получаются лишь при $N\leqslant 2$. Номер N определяет порядок (кратность) рассеяния волн, обусловленный (в данном приближении для граничного условия) влиянием волноводного эффекта.

Расчет поля значительно упрощается, если ввести предположение о некогерентности волн $\Psi^{(N)}(R)$ с разными N; явление внутренней когерентности в случайном поле обусловлено многократным (вследствие волноводного эффекта) рассеянием на одних и тех же неоднородностях. Этим обстоятельством можно пренебречь для достаточно пологих (крупномасштабных) неровностей ($k_0\tau_0\gg 1$, τ_0 — радиус корреляции неровной поверхности), когда можно пренебречь рассеянием в обратном направлении. В этом случае для вторых моментов поля при $k_0 r\gg 1$ и статистически изотропной гра-

нице получим

$$I_m(r,z)=\langle\Psi(r,z)\Psi(r,z)^*\rangle\simeq\frac{D_m(r)}{r}|\Phi(z,\zeta_m)|^2, \tag{5}$$

где

$$D_m(r)=\sum_{l=1}^{M}\int_0^r D_l(r)B_{lm}\exp[-2\mathrm{Im}\,\zeta_m(r-L)]dL. \tag{6}$$

Здесь суммирование ведется по номерам всех распространяющихся в волноводе с гладкой границей волн; если $N(\tau)=\exp(-\tau^2/\tau_0^2)$, то

$$B_{lm}=\sqrt{\pi}\,\tau_0\sigma^2\sqrt{\left|\frac{\zeta_m}{\zeta_l}\right|}\left|\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,\zeta_l)\right]_{z=h}\Big/\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\Pi(\zeta)\right]_{\zeta=\zeta_m}\right|^2\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\tau_0^2}{4}(\zeta_l-\zeta_m)^2\right] \tag{7}$$

при $|\tau_0\zeta_m|\gg 1$. Это коэффициент однократного рассеяния, характеризующий количество энергии, перешедшей вследствие рассеяния из l-й нормальной волны в m-ю на единице длины волновода.

Решение уравнения (6) методом итераций дает для $D_m(r)$ выражение в виде ряда [5], члены которого соответствуют вторым моментам полей нормальных волн, формирующих $\Psi^{(N)}(z,y,z)$.

Дифференцируя обе части равенства (6) по r, получим уравнение

$$\frac{d}{dr}D_m(r)=-2\mathrm{Im}\,\zeta_m D_m(r)+\sum_{l=1}^{M}B_{l,m}D_l(r), \tag{8}$$

известное как уравнение переноса в двумерной задаче.

При некоторых условиях [6, 7], накладываемых как на статистические параметры границы, так и на коэффициент затухания нормальной волны, обусловленный поглощением в среде, уравнение вида (8) для волн, распространяющихся в положительном направлении оси r, будет верно и при наличии обратного рассеяния, если в правую часть (8) ввести дополнительную сумму по l, учитывающую поступление энергии из волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси r [6]. Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (8) имеет решение

$$D_m(r)=\sum_{j=1}^{M}D_{m,j}(0)\exp(-\beta_j r), \tag{9}$$

где число членов по j равно числу нормальных волн. Подставляя выражение (9) в формулу (8), получим

$$[\beta_j-2\mathrm{Im}\zeta_m]D_{m,j}(0)+\sum_{l=1}^{M}B_{l,m}D_{l,j}(0)=0. \tag{10}$$

Решая систему алгебраических уравнений (10) для разных m найдем β_j — корни определителя системы. Учитывая разные j, условие на источнике и принцип погашаемости при $r\to\infty$, найдем и $D_{m,j}(0)$. Нетрудно доказать лемму: все значения β_j лежат в области $(2\mathrm{Im}\,u_m)_{\min}\leqslant\beta_j\leqslant(2\mathrm{Im}\,\zeta_m)_{\max}$, $m\leqslant M$. При $\mu_m=\mu$, т. е. равенстве потерь на поглощение в среде для всех «захваченных» волноводом волн, имеется значение $\beta_1=\mu$, при котором $D_{m,1}(0)=\mathrm{const}$ при всех m. Так как $\beta_1<\beta_j$ с $j>1$, то на

достаточно больших расстояниях от источника

$$D_m(r) \simeq D_{m,1}(0) \exp[-\beta_1 r], \tag{11}$$

где

$$D_{m,1}(0) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} D_m(0). \tag{12}$$

На этих расстояниях нормальные волны разных номеров некогерентны, поэтому

$$I(r,z) \simeq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} D_m(0) l^{-\beta_1 r} \sum_{l=1}^{M} |\Phi(z,\zeta_l)|^2 \exp(\beta_1 r). \tag{13}$$

Заменяя суммирование интегрированием и учитывая, что

$$\Delta m \simeq -\frac{R_ц(\zeta_m)}{2\pi} \Delta\zeta_m \simeq \frac{R_ц(l_m)}{2\pi} k_0 n(h) \sin\chi \, d\chi,$$

получим для статистически средней аномалии распространения

$$A(r, z) = r l^{-\mu r} \frac{4^2 n(h)}{n(z_0)\, n(z)} \int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} \frac{\cos\chi \ \sin\chi \, d\chi}{R_ц(\chi) \sin\chi(z_0)} \cdot \frac{\int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} \frac{\sin\chi R_ц(\chi)}{\sin\chi(z)} d\chi}{\int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} R_ц(\chi) \sin\chi \, d\chi}. \tag{14}$$

Данное решение не имеет максимума при $z = z_0$; вследствие перерассеяния случайное поле как бы «забыло» о своем происхождении.

Формулы (11) и (14) будут справедливы, если для всех значений номера m

$$r \left(\sum_{j=1}^{M} B_{m,j} - B_{m,m} \right) \geqslant 1. \tag{15}$$

Это условие означает, что средняя интенсивность полного поля много больше средней интенсивности регулярной компоненты поля (здесь рассеяние происходит в ту же нормальную волну, что и исходная волна когерентного поля, распространяющуюся в том же направлении). На этих расстояниях когерентное поле — источник случайного поля — практически затухло. Суммарный поток энергии в последнем уже не растет; он постоянен, если нет активных потерь в среде, или затухает — при наличии поглощения. Однако в случайном поле продолжается процесс перераспределения энергии между нормальными волнами из-за многократного перерассеяния на неровной границе. Вследствие этого, при отсутствии существенного обратного рассеяния и равенстве потерь на поглощение в среде, в конце концов, наступает «установившийся режим». Потери на рассеяние в каждой из волн равны поступлению энергии. При этом средние потоки энергии будут одинаковы у всех волн. На последнее обстоятельство было обращено внимание, например, А. Д. Лапиным. В области, где превалирует регулярная компонента, по-прежнему справедлива формула Л. М. Бреховских (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Усредненное поле в подводном звуковом канале. Акуст. ж., 1965, 2, 2, 148—159.
2. Ф. Г. Басс. К статистической теории распространения волн (докт. дис.). Акустический ин-т АН СССР, М., 1962.
3. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров. Флуктуация звукового поля в случайнонеоднородной среде. Тр. 6 Всес. акуст. конференции, АШ 2, М., 1968.

4. Ю. П. Лысанов. О среднем коэффициенте отражения от неровной поверхности, ограничивающей неоднородную среду. Акуст. ж., 1969, 15, 3. 393—400.
5. И. А. Виноградов, В. М. Кудряшов. Модель поля в волновом приближении в волноводе со статистически неровной границей. Сб. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», Новосибирск, Гос. н.-и. ин-т метрологии, 1969, 136—146.
6. В. М. Кудряшов. Некоторые аспекты моделирования волнового поля в волноводе со стохастическими границами. Сб. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., ВНИЭП, 1970, 2, 53—62.
7. В. М. Кудряшов. Лекции на II Всесоюзной школе — семинаре по статистической гидроакустике. Одесса, 1970.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
24 июля 1970 г.