АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 4

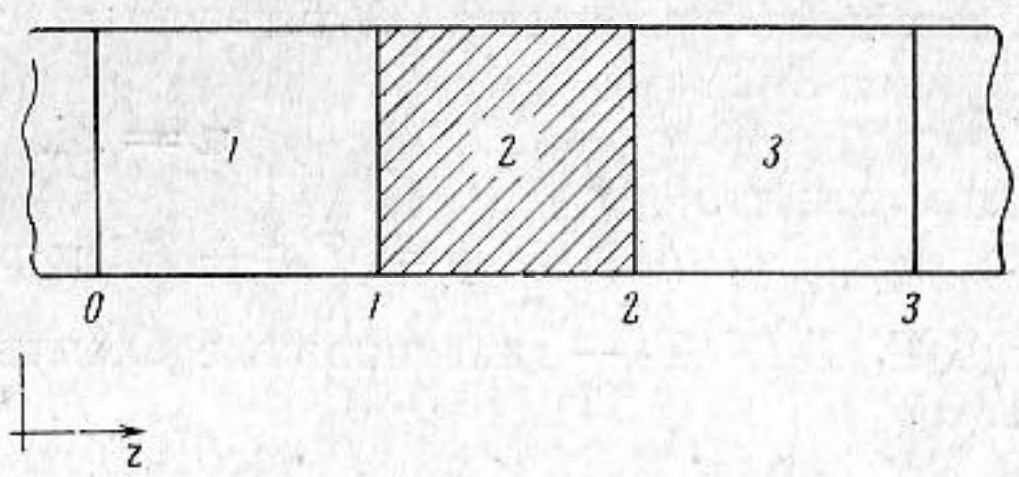
УДК 534.642

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

А. С. Прудников, К. В. Чернышев

Приводятся результаты исследований определенного класса акустических систем с использованием понятия о многополюсниках. Свойства таких систем полностью определяются одной из связанных между собой матриц — характеристической и импедансной. Получено соотношение, связывающее входные и выходные импедансы многополюсной системы, которое может быть использовано, например, для экспериментального определения матрицы импедансов. В простейшем случае четырехполюсной системы производилось экспериментальное исследование. Рассмотрен вопрос о влиянии присоединенной массы на точность результатов, а также возможность модельного изучения многополюсных систем.

При исследовании волноводов часто бывает удобно использовать понятие о многополюсной системе, широко применяемое при анализе линейных электрических цепей. Как можно показать, например, с помощью метода поперечных сечений [1], отрезок нерегулярного волновода можно представить в виде многополюсника с бесконечным, в общем случае, числом полюсов. Ячейку (фиг. 1), образованную двумя участками регулярного волновода 0 — *1* и *2* — *3* с включенным между ними участком нерегулярного волновода *1*—*2*, можно приближенно представить в виде конечного $4N$-полюсника. Точность приближения зависит от числа N, которое больше или равно числу распространяющихся в регулярном волноводе мод. Каждая мода характеризуется двумя динамическими переменными p_n и v_n, где n — номер моды. Для простоты мы предполагаем, что участки регулярных волноводов 0 — *1* и *2* — *3* могут отличаться только длиной.



Фиг. 1

Согласно определению $4N$-полюсника связь входных и выходных (штрихованных) значений динамических переменных p_n, v_n может быть осуществлена с помощью характеристической матрицы B порядка $2N$:

$$\mathbf{p}' = B\mathbf{p}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ p_N \\ v_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ v_1' \\ \vdots \\ p_N' \\ v_N' \end{pmatrix}.$$

Области 0—*1* и *2—3* могут быть, например, участками цилиндрической трубы с жесткими стенками, а область *1—2* — участком той же трубы с неоднородным заполнением. В качестве p_n, v_n и p_n',v_n' в этом случае могут быть приняты входные (сечение 0) и выходные (сечение *3*) значения амплитуд нормальных волн давления и продольной компоненты колебательной скорости. В то же время эти величины можно рассматривать как коэффициенты разложения полей давления и z-компоненты колебательной скорости в соответственных сечениях в ряд Фурье — Бесселя.

Отрезок волновода, который может быть разбит плоскостями, нормальными к оси z, на такого рода ячейки, мы будем рассматривать как $4N$-полюсник. Этот $4N$-полюсник имеет матрицу, образуемую перемножением матриц составляющих ячеек, по крайней мере, при условии непрерывности p_n и v_n на границах этих ячеек. Соответствующие ячейкам многополюсники в этом случае соединяются по цепной схеме.

Очевидно, выбрав достаточно длинные участки регулярных волноводов (фиг. 1), можно сколь угодно точно представить отрезок волновода 0—*3* как $4N_k$-полюсник, где N_k — число распространяющихся мод в регулярном волноводе.

Характеристическая матрица B акустического $4N$-полюсника полностью определяет акустические свойства соответственного отрезка волновода в части, касающейся его взаимодействия с соседними элементами.

Можно ввести другие совокупности динамических переменных, например,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1' \\ \vdots \\ p_N \\ p_N' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ \vdots \\ v_N \\ v_N' \end{pmatrix}$$

и написать уравнения $4N$-полюсника с помощью матрицы импеданцев Z порядка $2N$:

$$\mathbf{u} = Z\mathbf{i}. \tag{2}$$

Отметим, что

$$\mathbf{p} = T_1\mathbf{u} + T_2\mathbf{i} \text{ и } \mathbf{p}' = T_3\mathbf{u} + T_4\mathbf{i}, \tag{3}$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 — диагональные блочные матрицы порядка $2N$ с блоками $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, соответственно.

Используя соотношение (3), можно показать, что матрицы B и Z взаимосвязаны:

$$BT_1Z - T_3Z + BT_2 - T_4 = 0 \tag{4}$$

(символом 0 обозначена нуль-матрица). Соотношение (4) позволяет определить матрицу B, если известны элементы матрицы Z и наоборот. Выберем знаки величин p_n и v_n так, что величина $\operatorname{Re} p_n v_n^*$ будет представлять собой мощность, подводимую к системе. При этом выборе знаков математическим выражением взаимности механических и электрических систем является симметрия матрицы импеданцев:

$$Z = Z^+ \tag{5}$$

(символ плюс означает операцию транспонирования).

Матричное соотношение (5) эквивалентно $N(2N-1)$ скалярным соотношениям, связывающим элементы матрицы импеданцев Z_{ij}. Можно показать, что при $Z = Z^+$ матрица B удовлетворяет соотношению

$$BQB^+ + Q = 0, \tag{6}$$

где $Q = T_2 - T_3$ является диагональной блочной матрицей порядка $2N$ с блоком $\begin{Vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{Vmatrix}$. Следует отметить, что матрица BQB^+ антисимметрична, поэтому соотношение (6) эквивалентно $N(2N-1)$ скалярным равенствам, связывающим элементы характеристической матрицы b_{ij}. При $N = 1$ из соотношения (6) получаем хорошо известное в теории четырехполюсников равенство $\det \|b_{ij}\| = -1$. Умножая соотношение (6) справа на Q и учитывая, что $Q^2 = -E$ (E — единичная матрица), находим

$$B^{-1} = QB^+Q. \tag{7}$$

Соотношение (7) так же, как и (5), является одной из форм записи взаимных свойств. Его удобно использовать при изучении распространения волн в многополюсных системах.

Если матрица B определяет процесс распространения волн в многополюсной системе слева направо, то матрица $[B^{-1}]$ определяет процесс распространения волн в противоположном направлении. Введем обозначения:

$$\zeta_1 = \frac{v_1}{v_1},\ \zeta_2 = \frac{p_1'}{(v_1')}, \ldots, \zeta_{2i-1} = \frac{p_i}{v_i},\ \zeta_{2i} = \frac{p_i'}{v_i'}\ (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{8}$$

Величины ζ_i имеют смысл входных и выходных импеданцев многополюсника. Используя эти обозначения, можно написать уравнение (2) в виде

$$\|z_{ij} - \zeta_i\delta_{ij}\|\mathbf{i} = 0\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, 2N). \tag{9}$$

Условием нетривиальной совместности этой однородной системы уравнений является равенство:

$$\det \|z_{ij} - \zeta_i\delta_{ij}\| = 0. \tag{10}$$

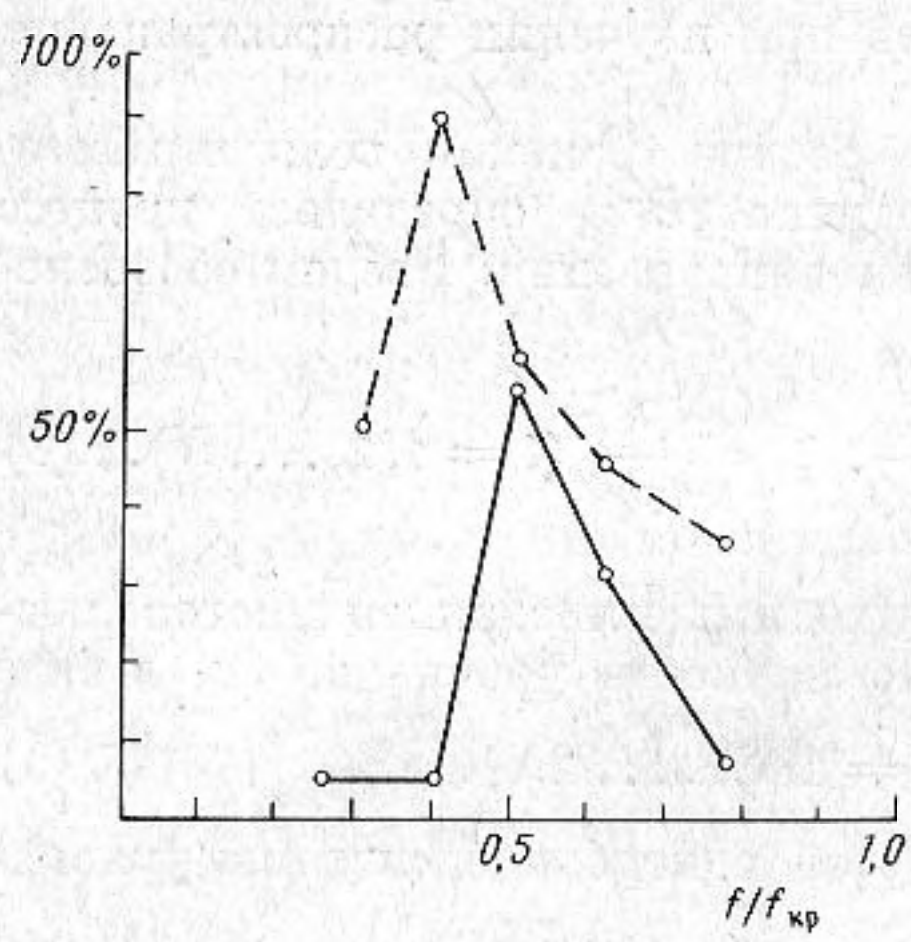
Это соотношение связывает между собой входные и выходные импеданцы многополюсной системы с помощью элементов матрицы импеданцев. Им можно воспользоваться для экспериментального определения матрицы импеданцев многополюсника, рассматривая его как уравнение относительно неизвестных z_{ij}. При этом импеданцы ζ_i могут быть найдены экспериментально. Если написать соотношение (10) для $N(2N+1)$ различных совокупностей ζ_i, то получится система нелинейных уравнений относительно z_{ij}. При решении этой системы можно несколько упростить расчеты и определение имеющих физический смысл корней, используя большее число различных совокупностей импеданцев ζ_i. Считая неизвестными все главные миноры матрицы импеданцев, мы получаем систему линейных уравнений с отличным от нуля определителем. Решив эту систему, мы находим непосредственно только диагональные элементы матрицы импеданцев. Последующее определение недиагональных элементов затруднений не вызывает. Производя большее, чем необходимо, число опытов — $2^{2N} - 1$ вместо $\langle N(2N+1)\rangle$, мы получаем значения $(2^{2N-1} - 1)$ неизвестных величин. Между этими величинами существует зависимость, поскольку они выражаются через $N(2N+1)$ независимых элементов матрицы импеданцев. Если анализируемая акустическая система является линейным $4N$-полюсником, то эти зависимости должны автоматически выполняться.

Когда в отрезках регулярного волновода (*0 — 1* и *2 — 3*) можно ограничиться рассмотрением одной нормальной волны, ячейку следует рассматривать как акустический четырехполюсник. В этом простейшем случае была проведена экспериментальная проверка теории.

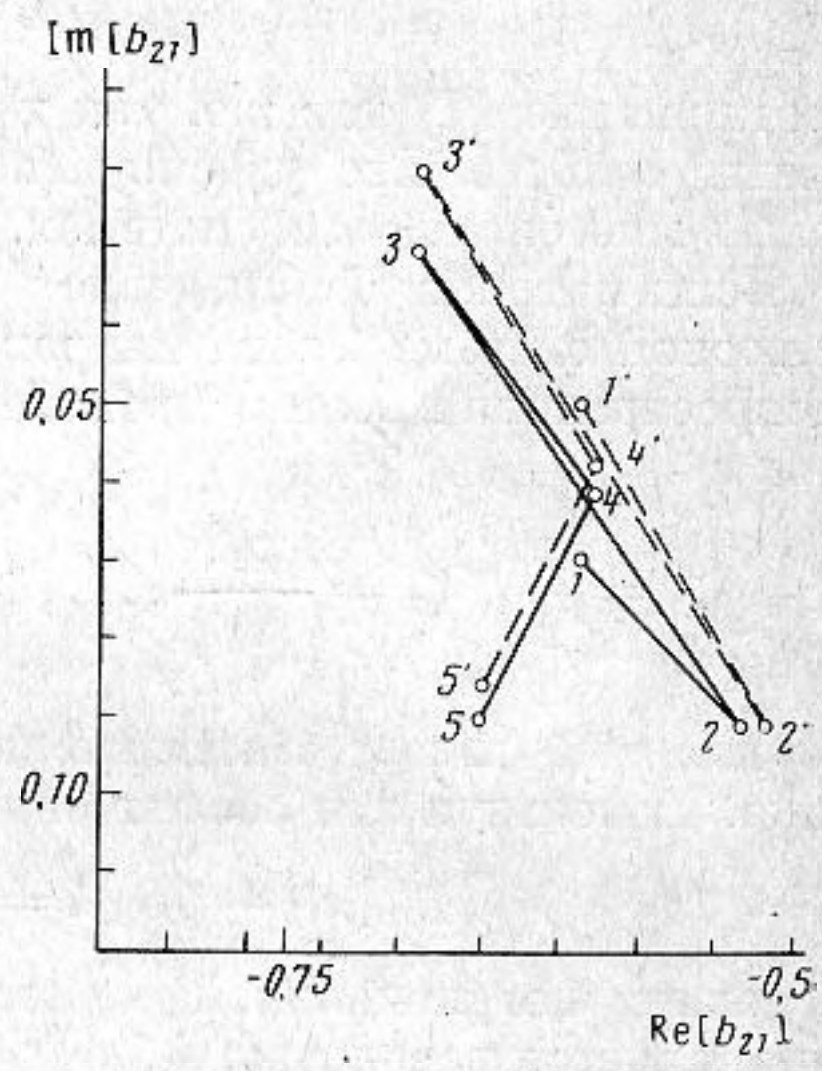
Элементы матрицы импеданцев отдельных ячеек определялись экспериментально по изложенному выше способу, который в случае $N = 1$

совпадает с методом, приведенным в работе [2]. Измерение входного сопротивления четырехполюсников производилось с помощью акустического интерферометра [3] на частотах ниже его первой критической частоты $f_{кр}$. Нагружение четырехполюсников осуществлялось жестко замкнутыми отрезками трубы различной длины. Для ячейки, образованной отрезком трубы с жесткими стенками, содержащим неоднородность в виде шарика из микролита, производилась проверка соотношения (10).

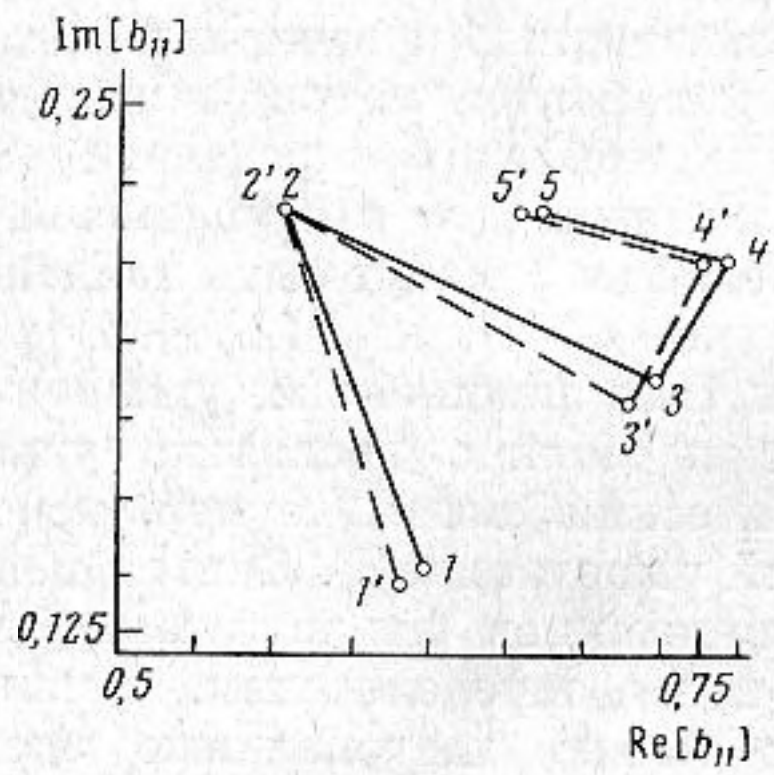
Были измерены четыре входных импеданца ячейки при четырех различных замыкающих сопротивлениях. По первым трем парам значений



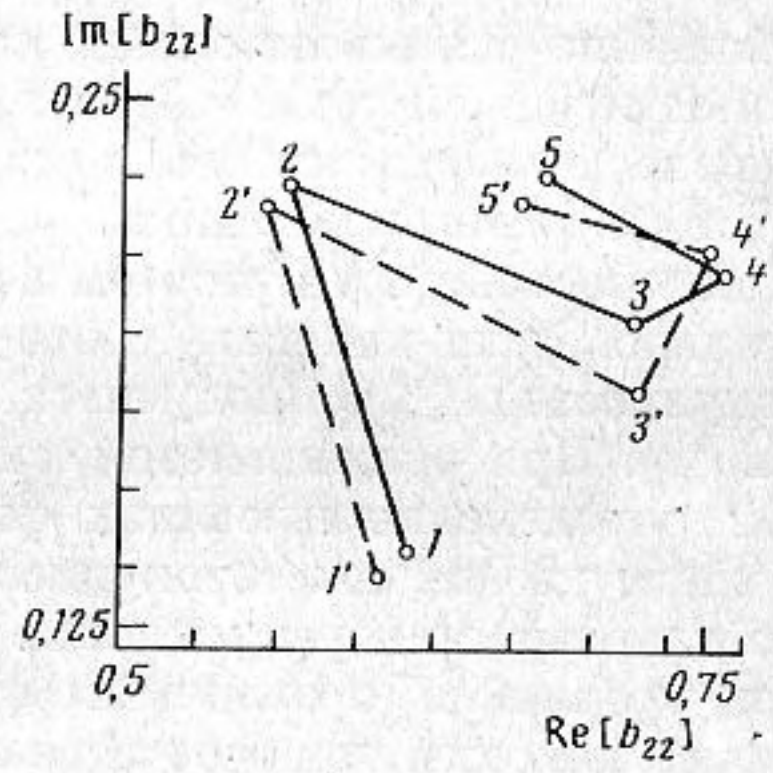
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

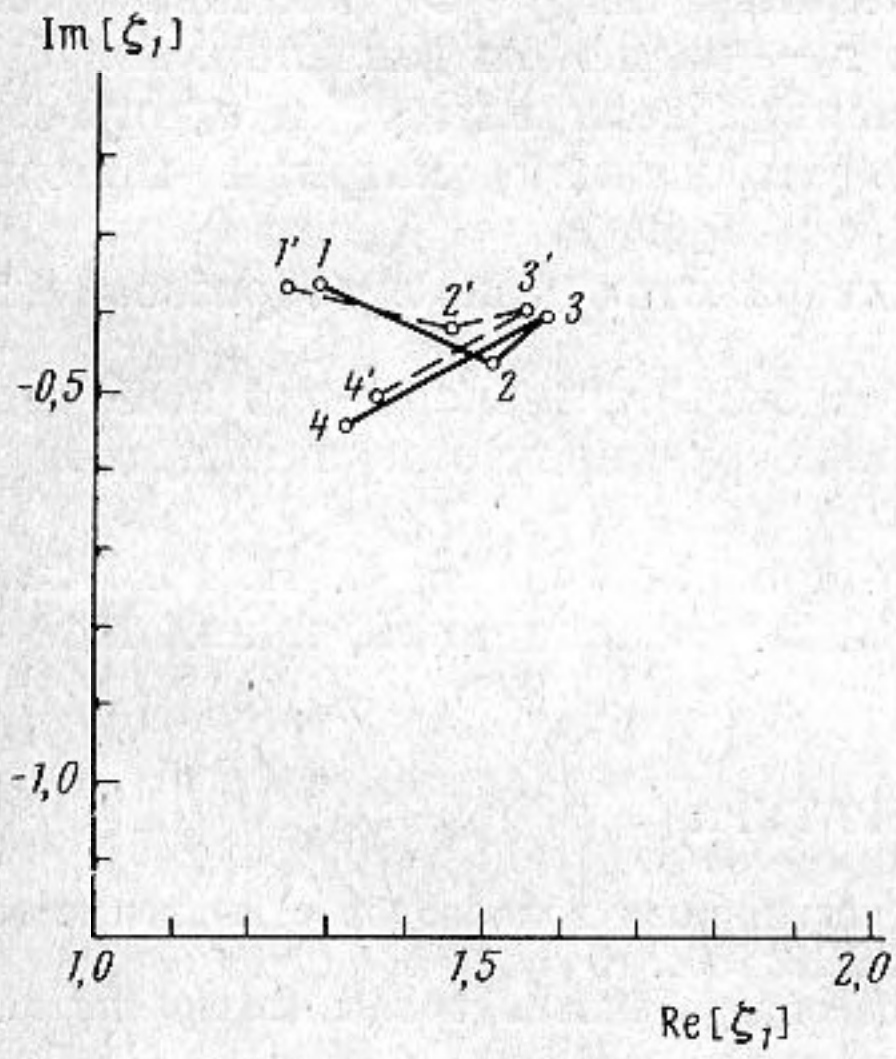


Фиг. 5

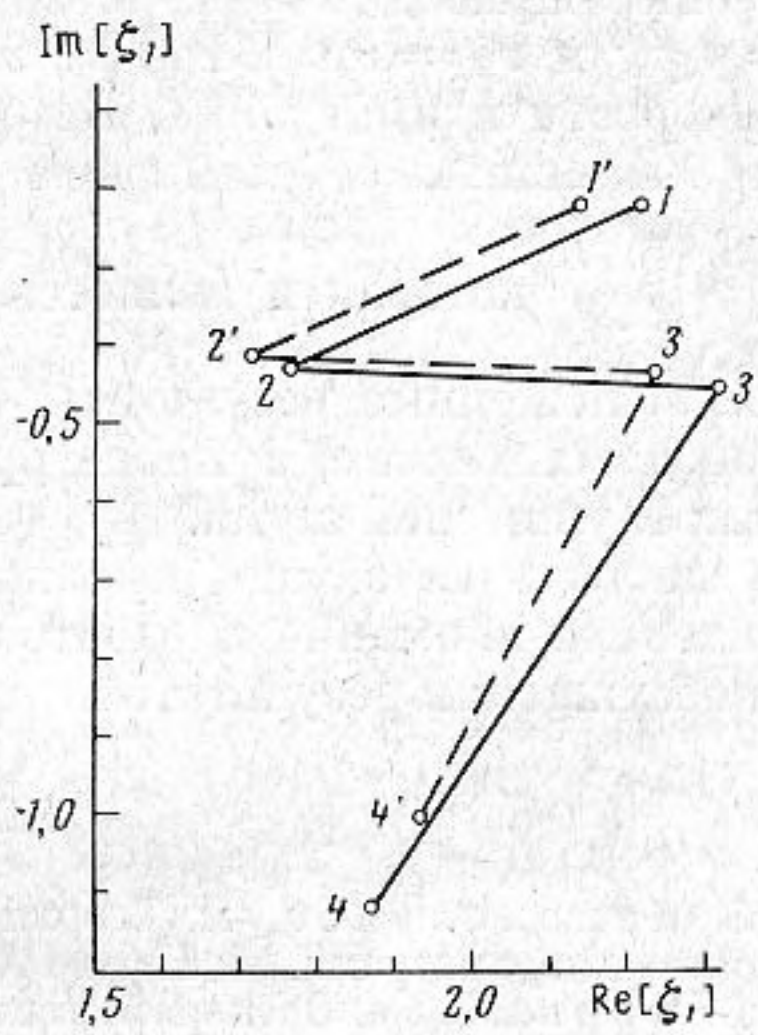
входных и замыкающих импеданцев вычислялись значения постоянных коэффициентов z_{11}, z_{22}, $\det \|z_{ij}\|$. Для четвертой пары значений импеданцев вычислялось соответствующее значение левой части соотношения (10). Значения действительной и мнимой частей полученного выражения сравнивались с отклонением от нуля, связанным с ошибкой метода измерений. Результаты представлены на фиг. 2. По оси абсцисс отложено значение безмерной частоты $f/f_{кр}$, по оси ординат — отношение полученного экспериментально отклонения действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей (10) к отклонению, определяемому ошибкой метода. На основании фиг. 2 можно утверждать, что представление системы в виде четырехполюсника допустимо на частотах $f < f_{кр}$, т. е. в тех случаях, когда в отрезке регулярного волновода воз-

можно распространение только одной нормальной волны. На частотах выше критической экспериментально полученное отклонение превышает отклонение, определяемое ошибкой измерения, в несколько раз. Для цепочки, составленной из четырех ячеек, содержащих неоднородности в виде шариков из микролита, производилось сравнение элементов b_{11}, b_{21}, b_{22} двух характеристических матриц: определенной экспериментально (сплошная линия) и полученной перемножением матриц ячеек, образующих цепочку (штриховая линия на фиг. 3, 4, 5). Результаты представлены в виде годографов.

Для цепочек, составленных из четырех идентичных ячеек, содержащих неоднородности, сравнивались импеданцы: измеренный экспериментально и рассчитанный согласно формулам работы [4] по определенной на опыте характеристической матрице одиночной ячейки. Результаты представлены на фиг. 6 (симметричная ячейка) и фиг. 7 (асимметричная ячейка).



Фиг. 6



Фиг. 7

Приведенные результаты свидетельствуют о применимости изложенной методики исследования к акустическим четырехполюсникам, в том числе и обладающим значительным активным сопротивлением.

При экспериментальном исследовании линий акустических четырехполюсников с распределенными параметрами необходимо иметь в виду, что точность изложенного метода определяется не только погрешностями измерений, но также и тем обстоятельством, что на границе ячейки, помещенной в интерферометр, возникают присоединенные массы. Наличие этих масс, естественно, отражается на значениях импеданцев z_{ij}. Когда из ячеек составляется цепочка, эти присоединенные массы могут изменить свою величину и даже оказаться равными нулю (последнее имеет место, если в плоскостях соединения ячеек акустические свойства волновода не изменяются скачком).

Образование присоединенной массы на границе ячейки объясняется влиянием нераспространяющихся колебательных мод, поэтому присоединенная масса будет мала, если рабочая частота f значительно меньше первой критической частоты интерферометра. Графики фиг. 3, 4 и 5 свидетельствуют о том, что роль присоединенной массы была невелика даже при условии $f > 0{,}5 f_{кр}$.

Наибольший эффект от возникновения присоединенной массы на границах ячейки имеет место в тех случаях, когда рабочая частота близка к критической частоте интерферометра, но все же меньше последней. Сами по себе элементы матрицы импеданцев четырехполюсника, связанного с

распространением волны поршневой моды, в окрестности критической частоты сильных изменений не испытывают. Поэтому частотные зависимости этих элементов в пределах $0{,}9\ f_{кр} \leqslant f \leqslant f_{кр}$ можно аппроксимировать линейными функциями, если известны их значения на концах этого интервала частот.

В образовании присоединенных масс вблизи первой критической частоты основную роль, очевидно, играет вторая мода (соответствующая ей нормальная волна возникает при переходе через критическую частоту). Пренебрегая действием присоединенных масс при $f = 0{,}9 f_{кр}$ и рассматривая систему как восьмиполюсник на частотах, несколько превышающих $f_{кр}$, можно вычислить элементы матрицы четырехполюсника на концах указанного интервала.

Отметим, что описанный метод экспериментального определения матрицы $4N$-полюсника особенно удобен при модельных исследованиях. Рассматривая уравнения (2) как уравнения связи [5], легко установить, что они приводятся к безразмерному виду с помощью замены $p_n = p_0 p_n^0$ и $v_n = v_0 v_n^0$, где p_0, v_0 и z_0 — масштабы давления, колебательной скорости и импеданца. Безразмерные величины p_n^0 и v_n^0 преобразуются с помощью безразмерной (нормированной) матрицы импеданцев $\left\| \frac{1}{z_0} z_{ij} \right\|$, которая и является инвариантом при преобразованиях подобия. Изложенные результаты могут быть применены для исследования волноводных систем, а также при конструктировании активных и реактивных глушителей шума.

В заключение авторы выражают признательность С. Н. Ржевкину за проявленное внимание к работе и К. А. Велижаниной, принявшей участие в обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. К. В. Чернышев. Экспериментальное определение матрицы четырехполюсника. Вестн. МГУ, 1966, сер. III, 1, 59—65.
3. Л. Беранек. Акустические измерения. М., ИЛ, 1952.
4. Л. Бриллюэн и М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.
5. М. В. Кирпичев и П. К. Конаков. Математические основы теории подобия. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 13 апреля 1970 г.