АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 4

УДК 534.26

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА В ЖИДКИЙ СЛОЙ ПЛАСТИНОЙ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

В. Н. Романов

Рассматривается звуковое поле в жидком слое, ограниченном с одной стороны полупространством с заданным акустическим импеданцем, а с другой — изгибно-колеблющейся пластиной, соприкасающейся с полупространством жидкости. Показано, что звуковое давление в жидком слое имеет сложное пространственное распределение, которое, однако, на низких частотах можно описать простыми зависимостями. Проанализировано влияние импеданца поверхности полупространства на поле внутри слоя.

В работе [1] исследовано излучение звука изгибно-колеблющейся пластиной, возбуждаемой сосредоточенной силой и соприкасающейся с жидким слоем, в полупространство; при этом, однако, вопрос о структуре поля в жидком слое не затрагивался.

Для определения структуры поля в жидком слое (фиг. 1) необходимо решить дифференциальное уравнение колебаний пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой $F\delta(r-r_0)\exp(-i\omega t)$, действующей в начале координат (экспоненциальный множитель в дальнейшем опускаем):

$$D(\Delta^2 w_1 - k_{\text{и}}^4 w_1) = -F\delta(r-r_0) - p_2(r,0) + p_1(r,0) \tag{1}$$

при граничных условиях на поверхности пластины

$$w_1 = \frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial p_2}{\partial y} \tag{2}$$

и на поверхности $y=H$, имеющей импеданц z_2,

$$w_2 = \frac{p_2(r,H)}{-i\omega z_2}, \tag{3}$$

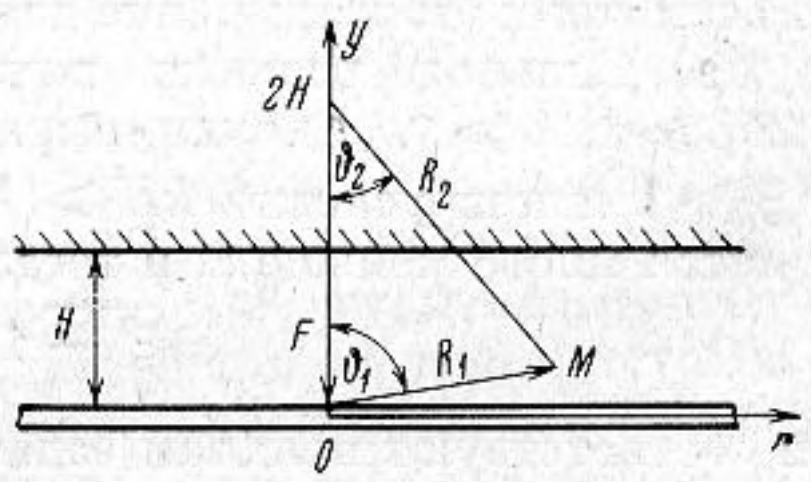
при этом решения для p_1 в полупространстве и для p_2 в слое должно удовлетворять волновому уравнению: $\Delta p_{1,2} + k^2 p_{1,2} = 0$.

Здесь приняты следующие обозначения: ρ и k — плотность и волновое число в жидкости, $k_{\text{и}}$ — волновое число изгиба в пластине ($k_{\text{и}}^4 = \omega^2 m / D$), D и m — изгибная жесткость и масса на единицу поверхности пластины, w — смещение нейтральной плоскости пластины, H — толщина слоя, z_2 — удельный акустический импеданц верхней границы слоя, являющейся локально-реагирующей поверхностью [2].

Решение будем искать в виде интегралов Фурье — Бесселя:

$$w_1(r) = \int_0^\infty w_1(\lambda)\,\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda;$$

$$F(r) = \int_0^\infty \Phi(\lambda)\,\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$



Фиг. 1.

$$p_1(r, y) = \int_0^\infty p_1(\lambda)\,\lambda J_0(\lambda r)\exp(\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,y)\,d\lambda;$$

$$p_2(r, y) = \int_0^\infty [p_{21}(\lambda)\exp(-\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,y) + p_{22}(\lambda)\exp(\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,y)]\,\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

Использовав обратное преобразование Бесселя, найдем, что $\Phi(\lambda) = F/2\pi$. Для определения неизвестных функций $w_1(\lambda)$, $p_1(\lambda)$, $p_{21}\lambda$ и $p_{22}\lambda$ используем обратное преобразование Фурье — Бесселя и соотношения (1), (2) и (3). Окончательное искомое решение для p_1 и p_2 имеет вид

$$p_2(r, y) = \frac{-Fk^2b\beta}{2\pi}\int_0^\infty LJ_0(kr\xi)\,[1 - V(\xi)\times$$

$$\times \exp(-2kH\sqrt{\xi^2 - 1})]\exp(-ky\sqrt{\xi^2 - 1})\,\xi d\xi. \qquad (4)$$

$$p_2(r, y) = \frac{Fk^2b\beta^3}{2\pi}\int_0^\infty LJ_0(kr\xi)\,[\exp(ky\sqrt{\xi^2 - 1}) +$$

$$+ V(\xi)\exp(ky\sqrt{\xi^2 - 1} - 2kH\sqrt{\xi^2 - 1})]\,\xi d\xi, \qquad (5)$$

где $L = 1/\{\sqrt{\xi^2 - 1}\,(\xi^4 - \beta^2)\,[1 - V(\xi)\exp(-2kH\sqrt{\xi^2 - 1})] - 2b\beta^3\}$, $\xi = \lambda/k$; $\beta = \frac{k_и^2}{k^2} = \frac{f_{гр}}{f}$ ($f_{гр}$ – граничная частота пластины, при которой длина изгибной волны в пластине, помещенной в вакуум, равна длине волны в жидкости); $b = \frac{\rho c_п}{2\sqrt{3}\rho_0 c}$ ($c_п$ и c — скорости продольных волн в пластине и жидкости соответственно, ρ_0 — плотность материала пластины). Функция $V(\xi)$ определяется как $V(\xi) = -\frac{(1 + n\sqrt{\xi_2 - 1})}{(1 - n\sqrt{\xi^2 - 1})}$ где $n = z_2 / i\rho c$, и по смыслу является коэффициентом отражения от поверхности, расположенной при $y = H$.

Для вычисления выражений (4) и (5) асимптотическими методами необходимо определить местоположение полюсов подынтегральных функций с целью определения их влияния на результат интегрирования. Полюса определяются корнями выражения

$$\frac{1}{I} = 0. \qquad (6)$$

Рассмотрим это выражение для двух случаев:

а) Сильная реакция жидкости на колебание пластины, при этом $2b\beta \gg 1$, $\beta \gg 1$. Анализ выражения (6) показывает, что в этом случае $\xi \gg 1$ и при условии $kH > 1$ выражение $V(\xi)\exp(-2kH\sqrt{\xi^2 - 1})$ становится много меньше 1, и тогда полюса определяются из выражения

$$\sqrt{\xi^2 - 1}\,(\xi^4 - \beta^2) - 2b\beta^3 = 0 \qquad (7)$$

и соответствуют полюсам задачи о колебании пластины, соприкасающейся с двумя полупространствами жидкости. Таким образом, в этом случае волновые числа нормальных волн в слое не зависят от его толщины, что объясняется отсутствием системы стоячих волн в слое (нормальных волн) вследствие высокой звукопрозрачности пластины.

б) Слабая реакция жидкости на колебание пластины. В этом случае соотношение (6), произведя замену $\xi = \sin\vartheta$ (ϑ — в общем случае комплексный угол), можно привести к виду:

$$1 - V_1(\vartheta)V_2(\vartheta)\exp(2ikH\cos\vartheta) = 0, \tag{8}$$

$$V_1 = \frac{\dfrac{-i\cos\vartheta}{b\beta}\left(1 - \dfrac{1}{\beta^2}\sin^4\vartheta\right)}{\left(\dfrac{-i\cos\vartheta}{b\beta}\left[1 - \dfrac{\sin^4\vartheta}{\beta^2}\right] + 2\right)}; \quad V_2 = \frac{\dfrac{z_2}{\rho c}\cos\vartheta - 1}{\dfrac{z_2}{\rho c}\cos\vartheta + 1}$$

— коэффициенты отражения от пластины и поверхности с импеданцем z_2, соответственно.

Корни выражения (8), подробно рассмотренные в работе [2], определяют характеристики нормальных волн в слое при наличии отражения от обеих его границ. Сумма вычетов подынтегральной функции в этих полюсах и определяет поле в слое. Далее мы будем рассматривать излучение пластины в наиболее интересном для нас случае сильной реакции жидкости на ее колебание.

Используя метод перевала и учитывая, что на больших удалениях от пластины вклад полюсов, определяемых из выражения (7), несущественен в результатах интегрирования выражений (4) и (5), получим на частотах ниже граничной звуковое давление вне слоя:

$$p_1(r, y) = \frac{-ikF\cos\vartheta_0[1 - V_2(\vartheta_0)\exp(2ikH\cos\vartheta_0)]\exp(ikR_0)}{2\pi R_0 Q(\vartheta_0)} \tag{9}$$

и звуковое давление внутри слоя (при $kH > 1$):

$$p_2(r, y) = \frac{ikF}{2\pi}\left[\frac{\cos\vartheta_1\exp(ikR_1)}{R_1 Q(\vartheta_1)} + \frac{\cos\vartheta\, V_2(\vartheta_2)\exp(ikR_2)}{R_2 Q(\vartheta_2)}\right], \tag{10}$$

где

$$Q(\vartheta_j) = 2 - \frac{i\cos\vartheta_j}{b\beta}\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\sin^4\vartheta_j\right)[1 - V_2(\vartheta_j)\exp(i2kH\cos\vartheta_j)],$$

$$(j = 0, 1, 2),$$

R_0, ϑ_0 — величина радиуса-вектора и угла между ним и осью y в полупространстве, R_1, R_2, ϑ_1 и ϑ_2 — величины радиусов-векторов и углов между ними и осью y в слое.

Выражение (9), определяющее поле вне слоя, подробно исследовано в работе [1], поэтому проанализируем соотношение (10), определяющее поле в слое жидкости.

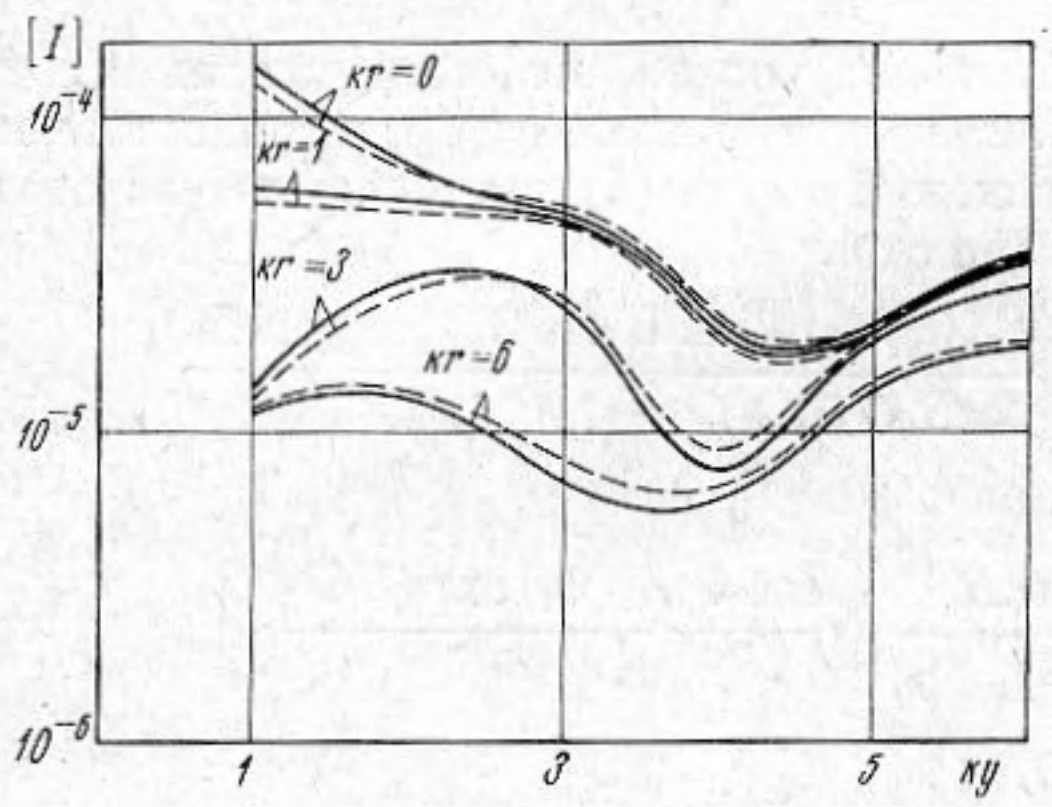
Первое слагаемое выражения (10) соответствует волне, исходящей из точки приложения силы к пластине, а второе слагаемое — волне, образованной мнимым источником, расположенным при $y = 2H$ (фиг. 1), производительность которого пропорциональна коэффициенту отражения от поверхности $V_2(\vartheta_2)$. Поскольку выражение (10) получено методом перевала, то невозможно аналитическим путем определить наименьшее расстояние от пластины и, следовательно, минимальную толщину слоя, при которых это выражение еще справедливо. Для определения пространственной границы применимости необходимо произвести численный расчет точного выражения (5) и сравнить результаты этого расчета с расчетом по асимптотическому выражению (10). Для проведения численного расчета интеграла в выражении (5) необходимо сместить полюс, находящийся на вещественной оси, которая является путем интегрирования. Для этого введем внутренние потери в материал пластины, коэффициент которых обозначим η.

При этом в выражение (5) необходимо подставлять параметры задачи

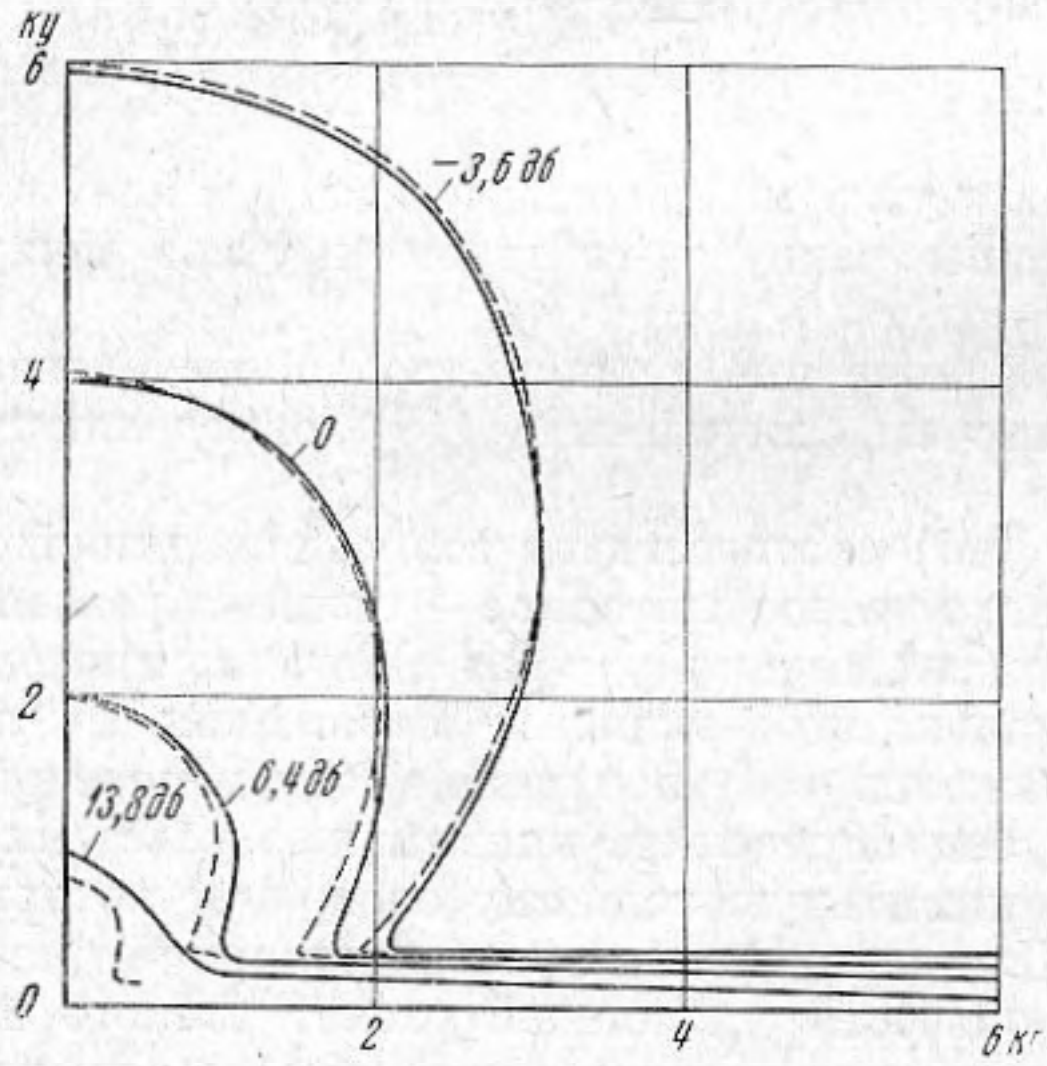
с учетом η: $\beta^2 = \beta_0^2(1 + i\eta)$; $b\beta^3 = b_0\beta_0^3(1 + i\eta)$, где индекс 0 определяет параметры, рассчитываемые без учета η. Выделив действительную и мнимую части подынтегральной функции, разделив путь интегрирования от 0 до ∞ на два участка (от 0 до 1, в пределах этого участка $\sqrt{\xi^2 - 1} = -i\sqrt{1 - \xi^2}$, и от 1 до ∞), получим выражения, удобные для численного расчета на ЦВМ.

На фиг. 2 при $\beta = 32$ сопоставлены результаты расчета модуля интеграла I, входящего в выражение (5), на ЦВМ — сплошные линии и асимптотическим методом перевала — штриховые линии, при $z_2 \to \infty$. Из фигуры следует, что при $ky > 1$ совпадение результатов вполне удовлетворительное. Физически этот результат объясняется следующим образом.

Как уже указывалось, поле в слое образуется в результате наложения излучения двух источников — на пластине и на расстоянии $2H$ по нормали к пластине. Если бы поле первого источника при $ky > 1$ удовлетворительно описывалось асимптотическим выражением (первое слагаемое формулы 10), то можно было бы утверждать, что тем более поле второго источника в слое, как более удаленного, также определялось бы с достаточной точностью асимптотическим выражением.



Фиг. 2



Фиг. 3

Проведенное сопоставление результатов расчетов излучения бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой, на ЦВМ и по асимптотическим формулам показали, что при $\beta \geqslant 4$ и при $ky > 1$ можно с большой степенью точности пользоваться асимптотическими выражениями для расчета поля. В качестве примера на фиг. 3, для $\beta = 32$ приведены кривые равного давления, рассчитанные по асимптотическим выражениям (штриховые линии) и на ЦВМ (сплошные линии) для изучения точечно-возбуждаемой пластины, соприкасающейся с жидкостью двумя сторонами.

Асимптотические выражения, по сути дела, определяют сформированную звуковую волну, распространяющуюся от источника. В случае точечно-возбуждаемой пластины при $\beta \gg 1$ источником излучения является область пластины, размеры которой не превышают доли изгибной волны в пластине и которая окружает точку возбуждения. Так как $\beta \gg 1$, то длина изгибной волны много меньше длины волны в жидкости, и источник можно считать точечным, у которого, как известно, акустическая волна сформировывается при $ky > 1$ [3]. Таким образом, для описания поля в слое, толщина которого удовлетворяет неравенству $kH > 1$ при $\beta \geqslant 4$ можно с достаточной степенью точности пользоваться выражением (10).

Выясним влияние коэффициента отражения $V_2(\vartheta_2)$ на величину звукового давления в слое. Предварительно представим коэффициент отражения в виде $V_2(\vartheta_2) = Ve^{i\varphi}$, где V и φ — модуль и фаза коэффициента отражения соответственно.

Определим отношение $\varkappa_1$ звукового давления $p_2(r, y)$ в слое к давлению, которое было бы в отсутствие слоя в той же самой точке. Обозначим это давление $p_\infty(r, y)$, оно может быть определено из выражения (10), если в нем положить $V_2(\vartheta_2) = 0$. Учитывая, что $\cos\vartheta_1 = y / R_1$, $\cos\vartheta_2 = (2H - y) / R_2$, и $b\beta \gg 1$, найдем $\varkappa_1 = 1 + Vl^{i\varphi}\left(\frac{2H}{y} - 1\right)\frac{R_1^2}{R_2^2} l^{ik(R_2 - R_1)}$

Первое слагаемое в этом выражении определяет вклад источника на пластине в отсутствие верхней границы слоя, а второе слагаемое — вклад мнимого источника, обусловленного наличием этой границы. При больших удалениях от точки возбуждения пластины $R_1 = R_2 = R$, при этом условии рассмотрим два случая:

1. $V = 1$, $\varphi = 0$ (жесткая граница слоя), тогда $\varkappa_1 = 1 + \left(\frac{2H}{y} - 1\right)$

на середине слоя $\varkappa_1 = 4$.

2. $V = 1$, $\varphi = \pi$ (мягкая граница слоя), тогда $\varkappa_1 = 1 - \left(\frac{2H}{y} - 1\right)$.

на середине слоя $\varkappa_1 = -2$.

Из этих результатов следует, что на больших удалениях от точки возбуждения пластины при наличии полностью отражающей верхней границы слоя поле определяется мнимым источником, причем наибольшее увеличение поля по сравнению с полем в отсутствие слоя имеет место при наличии жесткой границы слоя.

На фиг. 4 представлены результаты расчета на ЦВМ (при $kr < 6$) и по выражению (10) (при $kr > 6$) модулей $p_2(r, y)$ — штриховая линия, и $p_\infty(r, y)$ — сплошная линия, для случая жесткой границы слоя, $kH = 2\pi$, при $\beta = 32$. Расчетная точка находилась на середине высоты слоя. Из этой фигуры следует, что до $kr < 12$ влияние отражения от границы слоя на формирование поля в точках, находящихся посредине слоя, невелико, а при $kr > 16$ поле в этих точках полностью определяется отражением от границы слоя. Этот результат физически объясняется следующим образом. Как действительный, так и мнимый источники имеют направленность излучения, определяемую $\cos\vartheta_j$, при больших удалениях от этих источников $\cos\vartheta_1$ становится меньше $\cos\vartheta_2$ (см. фиг. 1), ибо при этом условии $\vartheta_1 > \vartheta_2$, поэтому вклад отражения от границы слоя в формировании поля является определяющим. При этом в случае жесткой границы слоя излучения мнимого и действительного источников суммируются в фазе, а в случае мягкой границы — в противофазе, поэтому и максимальное увеличение давления имеет место в случае жесткой границы слоя.

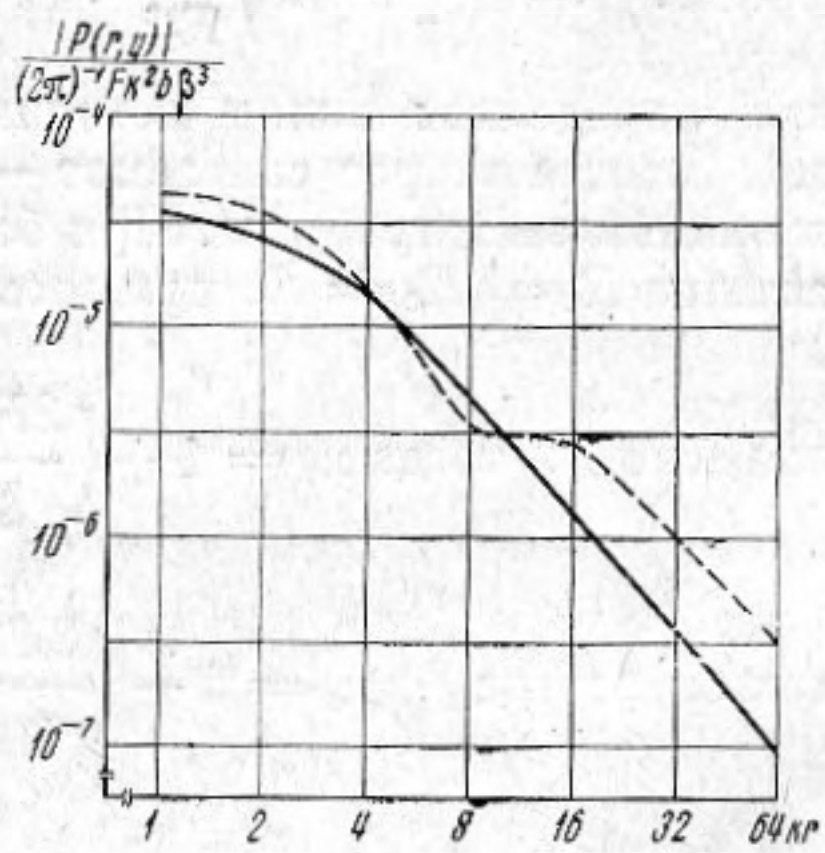
В остальных точках по высоте слоя имеют место аналогичные закономерности (за исключением плоскости $y = H$, где $\vartheta_1 = \vartheta_2$). Проинтегрировав квадрат модуля $p_2(r, y)$ по высоте слоя и разделив на эту высоту, получим величину, характеризующую звуковую энергию, содержащуюся в слое. В случае жесткой границы слоя, $\bar{p}_2^2 = 4\varepsilon$, а в случае мягкой границы $\bar{p}_2^2 = 1{,}33\varepsilon$, где $\varepsilon = k^2H^2F^2 / (4\pi b\beta^3R^2)^2$. Таким образом, в случае мягкой границы слоя на больших удалениях от источника вдоль слоя распространяется значительно меньше звуковой энергии, чем в случае жесткой границы.

Полученное выражение для звукового давления в слое позволяет вычислить давление в слое при воздействии на упругую пластину совокупности некоррелированных сил с пространственной функцией корреляции вида $f^2\delta(x - x')\delta(z - z')$. Квадрат давления в точке наблюдения определится

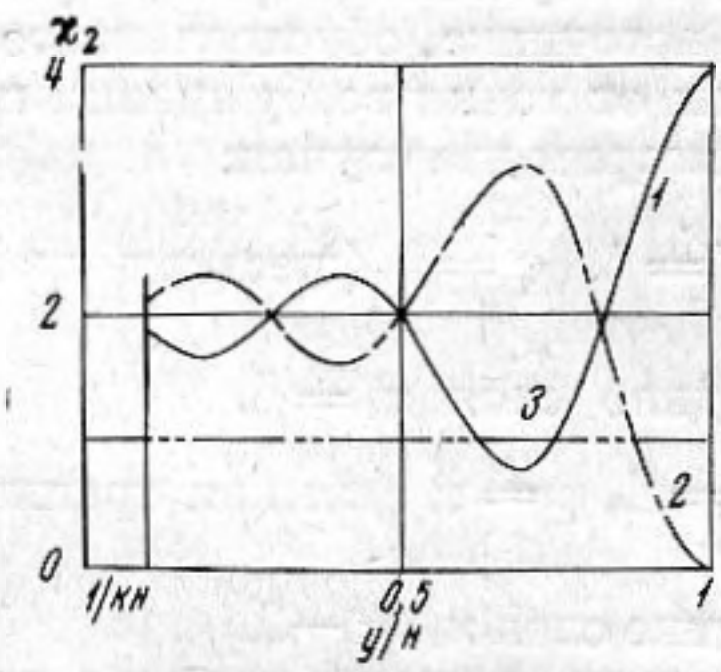
тогда следующим интегралом по поверхности пластины:

$$p^2(M) = f^2 \iint\limits_{s\,s'} G(r_1) G^*(r_2) \delta(x - x') \delta(z - z') ds ds', \tag{11}$$

где r_1 — величина радиуса-вектора, проведенного из точки на пластине с координатами x, z в точку наблюдения M, а r_2 — из точки на пластине с координатами x', z' в эту же точку наблюдения. Функции Грина $G(r_i)$ являются решениями задачи по определению поля в слое при возбуждении пластины единичной силой и определяются выражением (10), в котором



Фиг. 4



Фиг. 5

необходимо положить $F = 1$. Выражение (11) можно представить в виде

$$p^2(M) = \frac{k^2 f^2}{16\pi} \varkappa_2,$$

где $\varkappa_2$ — функция, зависящая от отношения координаты точки наблюдения M к толщине слоя H, от волнового размера слоя по толщине (kH) и от коэффициента отражения от границы слоя.

Функция $\varkappa_2$ рассчитывалась на ЦВМ для $kH = 2\pi$ и представлена на фиг. 5 в зависимости от отношения y / H для 3-х случаев: жесткая граница слоя — кривая *1*, мягкая граница — кривая *2* и полностью поглощающая граница — кривая *3*.

Из фигуры следует, что при наличии полностью отражающих границ (кривые *1* и *2*) в слое создается система стоячих волн, которые при достаточно большом удалении точки наблюдения от границы слоя приводят в среднем к удвоению квадрата давления акустического поля по сравнению с полностью поглощающей границей слоя (кривая *3*). Таким образом, импеданц границы слоя существенно изменяет распределение и величину звукового давления в слое, создаваемого излучением пластины, возбуждаемой одиночной силой или совокупностью сосредоточенных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Maidanik. Acoustic radiation from a driven infinite plate backed by a parallel infinite baffle. J. Acoust. Soc. America, 1967, 42, 1, 27—31.
2. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средых. М., Изд-во АН СССР, 1957, стр. 26—28, 309—316.
3. Л. М. Скучик. Основы акустики. М., ИЛ, 1958, стр. 189—190.

Ленинград

Поступила в редакцию
1 июня 1970 г.